BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
107
NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

SECTIONVM
CONICARVM
SYNOPSIS.

Digitized by Google

SECTIONVM CONICARVM SYNOPSIS

CLAR. VIRI

D. GVIDONIS GRANDI

CREMONENSIS

Abbatis Camaldulenſis, Olim in Piſana Vniverſitate Mathematicae Publici Profeſſoris

ADDITAMENTIS, SCHOLIIS, COROLLARIIS, ET SCHEMATIBVS

AVCTA

A D. OCTAVIANO CAMETTI

VERCELLENSI

ORDINIS S. BENEDICTI

Congregationis Vallis-Vmbroſae, & in eadem Vniverſitate Publico Matheſeos Profeſſore.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

B. R. NAPOLI

FLORENTIAE ANNO MDCCL. S. C.

Ex Typographio Ioannis Paulli Giovannelli.

SVPERIORVM PERMISSV.

Digitized by Google

Digitized by Google

EDITOR

AD LECTOREM.

CVM Sectionum Conicarum Synopſis commentariis meis adaucta, quae Romae primùm, Venetiis iterùm, tertióque impreſſa eſt, non in textu ſolùm, ſed in additamentis etiam, figuriſque menda plura contineat, quae Tyrones ſaepènumeró immorantur; non abs re futurum putavi, ſi alteram editionem pararem, in qua errores, qui Typographorum oſcitantia irrepſerant, delerem, & Schematâ in quibus Chalcographus ab inſtituto deflexerat, accuratiùs formari conarer: quod utrumque pro mei ingenii viribus praeſtitiſſe me arbitror in

prae-

praeſentiâ. Quoniam verò uſu compertum, exploratumque mihi eſt, demonſtrationes faciliús percipi a Tyronibus, ſi in textu locati fuerint commentarii, quam ſi eſſent ab eodem ſeiuncti; illos idcircò diverſo charactere impreſſos, & parentheſi intercaeptos textui ſic adiunxi, ut ea, quae Auctor indemonſtrata paſſim reliquit, ſtricto quidem, ſed perſpicuo oſtenderim ratiocinio; quae verò breviús, obſcuriúſque demonſtravit, ſuppletis quibusdam, & evidentiús expoſitis nexibus illationum, faciliora reddiderim, Tyronumque captui accommodata. Cum autém in perluſtrandâ hac Sectionum Conicarum Synopſi illud incommodi perferatur, quod nimirúm propoſitiones non raró occurrant, quae veritates aliquot praeſupponunt, nec in Euclideis Elementis expreſſas, nec in Theorematis praecedentibus demonſtratas; neceſſum fuit, nonnullis propoſitionibus

bus Lemmata anteferre, aliquibus verò Scholia, & Conſectaria ſubnectere, quae veluti ſternant viam ad ſubſequentia demonſtranda. Auctoris textus ut integer ſervaretur, curavi; duobus tamén, tribuſvè locis exceptis, in quibus, Auctoris mente ſervatâ, unum, alterumque verbum oportuit immutari, ut indè clarior, planiorque fieret demonſtratio. Nullas praetereo, ubi neceſſariae omninó ſunt, citationes propoſitionum Euclidis, à Tacqueto ſumptarum, quas minùs ſaepè innuere Clariſſimus Auctor ſolet, licèt illis magna ex parte innixa ſit Theorematis demonſtratio. Atque haec ſunt, Amice Lector, commentaria, quibus maximè indigebat Sectionum Conicarum Synopſis, ut à Tyronibus poſſet proprio marte, & inoffenſo pede percurri. Nè opus iſtud erroribus vitiaretur, ſummam curam impendi; ſiqua tamen oculorum aciem fugerint, aut inter excudendum

de

delapſa fuerint menda, ea ut Tu ipſe tollas, enixè oro, obteſtorque. Si, uti ſpero, hos conatus qualeſcumque benignè exceperis, Geometriam quoquè novâ methodo demonſtratam propedièm operâ meâ, iiſdemque Typis in lucem prodituram, polliceor. Vale.

PRAE-

Digitized by Google

PRAEFATIO.

SEctionum Conicarum Doctrina, tum ſcitu valde jucunda, tum maximae utilitatis cenſenda eſt, cùm earum cognitio, non tantùm meris Geometris, ſed & Philoſophis, Aſtronomis, Opticis, Horographis, & Architectis neceſſaria ſit, & phyſicis ſpeculationibus, ac plurimis mechanicis uſibus admodùm opportuna. Sanè terreſtrium corporum tranſverſim projectorum motus per curvas Parabolicas *diſtenditur, ob proximas gravitatis directiones, pro parallelis ſenſibiliter habitas, utpote ad centrum maximè diſtans reſpicientes; conſideratis autem iiſdem directionibus, in rigore non aequidiſtantibus, ſed revera invicem inclinatis, utpote ad terrae centrum convenientibus: curvarum* Ellipticarum *arcus à projectis deſcribitur, cujus remotior Focus ad ipſum globi terreſtris centrum pertinet, Focus autem proximior idem eſt, qui ad* Pa-

rabolam *pertineret, ſi dictæ gravium directiones pro parallelis eſſent acceptae. Ita etiam Orbitae Planetarum circa Solem, & cujuſvis Satellitis circa primarium ejus Planetam*, Ellipticae *deſcribuntur, juxta Kepleri, & Neutoni hypotheſim: Porro, in Reflexionibus, & Refractionibus quoque aptè diſponendis, harum Sectionum Conicarum cognitio requiritur, quippe ex earum Focis pendet reflexio radiorum, qui aut in unum punctum concurrant, ubi ignem accendant, ſive in illud dumtaxat colliment, ut objecti proximiorem imaginem reddant, vel paralleli remittantur, ut eandem fermè intenſionem ad maximam diſtantiam ſervent: quin & eorundem radiorum refractio lentes exigit, aut meniſcos*, Ellipticis, *aut* Hyperbolicis, *ſeu* Parabolicis, *&* Circularibus *figuris ſuperficiem rotatam habentes, ut ex earum Focis refractorum radiorum conjunctio, vel in proximius punctum collimatio quaeſitos reddat effectus. In horologiis etiam ſolaribus umbra ſtyli gnomonici, in plano, cui inſiſtit*, Hyperbolas *plerumque deſcribit, in aliquo etiam ſitu* Parabolas, *in alio* Ellipſes, *ad quas lineae horariae ſuos terminos habent. Quin & ab Architectis arcus* Elliptici *ſaepe in aedifi-*

ciis ſunt deſcribendi, & *Fornices*, *terminis non horizontaliter poſitis inſiſtentes*, *in* Parabolicae, *aut* Hyperbolicae *figurae ſpeciem diſponendos tradidit Cl. F. Blondellus in ſua Architectura; Veliformis autem Florentina Teſtudo, ex hemiſphe-rio per quatuor feneſtras abſciſſa quadrabilis*, *Ichnographiam* Parabolicam *habet*, *ac perimetrum ſuarum cavitatum* Ellipticae *curvae aequalem*, *ut in geometrica demonſtratione Problematum Cl. Vincentii Viviani*, *qui bujuſce formae Teſtudinem propoſuerat*, *ipſe demonſtravi* pag. 37. & 136. *dicti Operis: imò & Militaribus Architectis*, *cavitatem Cuniculorum*, *pyrio pulvere*, *in obſidionibus*, *complendam*, Parabolica *curvatura diſponi debere tradit Cl. Bernardus Belidorus in ſuo novo curſu Mathematico* num. 609.

Cum verò adeò utilis ejuſmodi Sectionum Conicarum ſcientia, *nimis longa methodo*, *in Magni Geometræ Apollonii Pergæi libris expoſita videatur*, *ubi quandoque binas*, *aliquando ternas foliorum facies implet unius Theorematis*, *aut Problematis demonſtratio*; *ideò magis congruum reputavi*, *præcipuas harum curvarum proprietates*, *cum quibuſdam aliis recentius inventis*, *hac breviori Synopſi*,

compendioſiùs tradere , ut tempore non admodum prolixo ſtudioſi Adoleſcentes illas diſcere faciliori methodo poſſint ; id quod etiam Eruditi Lypſienſes comprobarunt , dum ſimilis illius mei compendii Sectionum Conicarum , italico idiomate dudùm expoſiti , & anno 1722 Florentiae impreſſi , Relationem exhibentes in ſupplementis ſuorum Actuum. Tomo VIII. *anno* 1724. *edito* pag. 434. *ita ſententiam ſuam exprimunt.* In tanto numero ſcriptorum , qui tradunt proprietates Sectionum Coni , etiamnum deſiderabatur liber aliquis , mole parvus , materia plenus, in demonſtrationibus brevis , & quod palmarium eſt , ad Veterum methodum conſcriptus. Rem igitur fecit gratiſſimam, & utiliſſimam Geometriae Studioſis celeberrimus Grandus , qui tam eleganter , tam copiosè , & tanta nihilominus brevitate perſecutus eſt hanc partem Geometriae , quam in Scholis plerique vix hactenus attigerunt , ſpiſſitudine voluminum , vel analyticis characteribus deterriti , & idcircò ultra Elementa Euclidis raro progreſſi .

Et quoniam ibidem pag. 435. *monent iidem Eruditi Lypſienſes* , Cl. Chriſtianum Aug. Hauſen , *in ipſa Lypſienſi Accade-*

mia ,

mia, Matheſeos Profeſſorem, utilitate operis permotum, inter perlegendum, verſionem hujus Opuſculi latinam adornaſſe, in gratiam Auditorum, brevi cùm lectionibus ejus Geometricis prodituram, & ab originali ſuo non differentem &c. *de quo etiam teſtantur, quod alicubi* demonſtrationes interdum breviores, & concinniores, ſuppletis quibuſdam, & evidentiùs eſpoſitis illationum nexibus, faciliores effecerit, & Figuras, in quibus Chalcographus ab hypotheſi aberraverat, accuratiûs conſtruxerit. *Cùm tamen ejuſmodi editionis nulla adhuc notitia pervenerit, ideò congruum fore duxi, ut haec mea Latina Synopſis Conicarum Sectionum, additis quibuſdam aliis Theorematibus aucta, & quibuſdam ſuperfluis ommiſſis, & prioris Italicae impreſſionis erroribus, tam in textu, quam in Figurarum deſcriptione correctis, in publicum prodiret, cujus uſus, non in Italia dumtaxat, ſed in quavis alia Europae provincia, plurimum utilis eſſe poterit, juxtà eorundem Lypſienſium Litteratorum atteſtationem; non enim plurimi, ſed pauciſſimi tantùm, ex Tranſalpinis Europae Studioſis hoc opuſculum, hetruſca lingua expreſſum, intelligere potuiſſent; unde*

& Egregius Hiſpanicae Militiae Archite-ctus D. Joannes de Aguillar, meum illud Italicum Sectionum Conicarum Compendium in hiſpanienſe idioma traducere maluit, ut ſuae nationis Diſcipulis, Mathematum ſtudio incumbentibus, intelligibile fieret: qua tamen verſione opportunior erit hæc Latina Expoſitio, quàm ideò hic imprimendam permittere malui; utpote quæ pleriſque Europae Geometris magis percipi poſſit, quam Italica, vel Hiſpanica, ſeu cuiuſvis alterius regionis idiomate peculiari reſcripta.

SE-

Digitized by Google

SECTIONVM CONICARVM SYNOPSIS.

DEFINITIONES PRIMAE.

I. PEr fixum punctum A, extra planum circuli BED acceptum, tranſiens recta linea BAF, utrinque indefinitè producta, ſi per ejuſdem circuli peripheriam circumducatur, illam perpetuò radens, uſque dum in eundem ſitum redeat, à quo moveri coepit: utraque ſuperficies, ex hoc lineae motu, hinc inde a fixo puncto A reſultans, *Conica* nuncupatur. *Fig. 1. & 2.*

II. Et ſolida ex his ſuperficiebus, ad circulum BED, vel huic oppoſitum bed terminatis, comprehenſa, *Coni* appellantur.

III. Tam ſuperficiei conicae, quam ipſius Coni *Vertex* dicitur fixum illud punctum A.

IV. Ejusdem autem Coni *Baſis* eſt ipſe circulus BED, ad quem terminatur.

V. Linea, quae verticem Coni A cum centro C ſuae baſis circularis coniungit, *Axis* eſt Coni.

Fig. 1. VI. Qui axis, ſi perpendicularis fuerit ad planum baſis, Conus ille *Rectus* vocabitur.

Fig. 2. VII. Si vero fuerit axis ad planum baſis obliquè inclinatus, Conus ille *Scalenus* dicetur.

CONSECTARIA.

I. PAtet hinc, utramque illam Conicam ſuperficiem, BAD, d AF, ad communem verticem A contrapoſitas, in infinitum extendi poſſe, producta utcumque linea illa genitrice harum ſuperficierum.

II. Sumpto quolibet puncto H in Conica ſuperficie, recta lineà illud coniungens cum vertice A, in eadem Conica ſuperficie jacebit: congruet enim cum recta EA, quae ſuperficiem illam, ſua circumvolutione deſcribens, per quodvis eius punctum tranſit, adeoque in idem punctum H impingit.

III. Vnde & quaelibet recta AH, iungens verticem Coni A cum aliquo puncto H eius ſuperficiei Conicae, producta in peripheriam baſis, ad aliquod eius punctum E pertinget.

IV. At ſi duo puncta H, I in eadem Conica ſuperficie accepta fuerint, recta HI, ſi per verticem A non tranſierit, intra Conum cadet: Nam iunctis ad verticem A, rectis AH, AI, & (a) ad baſis peripheriam productis, cui in-

a Per cor. 3.

incident ad puncta E, B, utique iuncta EB intra circulum cadet (a). Ergo planum trianguli ABE, intra Conum immergitur, quia ſecat eius baſim; itaque recta HI in hoc plano exiſtens, cum iungat duo puncta laterum [*AE*, *AB*] talis trianguli, intra Conum & ipſa manebit ſua illa portione dictis punctis interiecta; quamquam ſi ultra hinc inde [*verſus H*, *& I*] producatur, utique extra Conicam ſuperficiem ſe extendet. a 2. *III. Elem.*

V. Si Conus quolibet plano per verticem A tranſeunte ſecetur, Sectio triangulum erit: Nam utraque ipſarum linearum AB, AE, aut AB, AD, quae ſunt communes Sectiones ſuperficiei Conicae, & planorum ABE, vel ABD ipſam ſecantium, ſemper congruit cum ipſa recta mobili AB, tranſeunte per eadem puncta B, E, D, dum Conicam generat ſuperficiem; & comunis Sectio plani ſecantis cum plano baſis, eſt pariter (b) recta EB, vel BD, ergo ABE, aut ABD ſunt triangula rectilinea. b 3. *XI. Elem.*

SCHOLION.

I. SI de his quoque triangularibus Coni Sectionibus, non de curvis dumtaxat, agendum hic eſſet; conſideranda forent triangula, ſive plano per axem tranſeunte genita, ut ABD, AFE; quae ſemper invicem aequalia erunt in Cono recto, ob aequales eorum baſes, nempe diametros BD, FE circularis baſis, & aequalem altitudinem Axis AC, per- *Fig. 3.*

perpendicularis plano, adeoque (a) & omnibus rectis [*veluti FE, BD,*] per C tranſeuntibus: ſive extra axem traiecto plano ad chordas BE, aut BL protenſa ex vertice A [*conſideranda forent*] triangula ABE, ABL; quae in eodem cono recto iſoſcelia ſemper erunt, ob latera omnia AB, AE, AL, ſemper aequalia, quippe [*ob angulos rectos* (b) *ACL, ACE, ACB,*] eorum quadrata (c) aequantur quadrato axis AC, & quadrato radii circularis CB, aut CE, vel CL; Sed inaequalis magnitudinis, ob inaequales baſes BE, BL, quae cum aequalibus lateribus [*BA, AE, itemque BA, AL*] iunctae, angulos ſibi ad verticem trianguli oppoſitos BAE, BAL, inaequales efficiunt (d), quorum ſinus recti, [*ſeu ad AB perpendiculares*] EN, LO, pariter inaequales erunt; [*iuncta quippe OE, erunt latera LA, AO, aequalia lateribus EA, AO, & angulus LAB, ſeu LAO, maior* (e) *angulo EAB, ſeu EAO; igitur LO* (f) *maior erit EO: Sed in triangulo rectangulo NOE eſt EO* (g) *maior EN, ergo LO multò maior erit EN;*] & ad comunem baſim AB relata triangula ABE, ABL, erunt ut eorum altitudines inaequales (h) EN, LO.

II. Itaque ſi angulus verticalis BAD trianguli per axem tranſeuntis rectus fuerit, aut acutus; reliquorum triangulorum extra axem traiectorum anguli BAE, BAL ſubinde minores fient, pro ut minori chordae BE, BL inſiſtent (i): [*quia vero diameter circularis*

BD

a *def.* 3. *XI. Elem.*
b *def.* 3. *XI. Elem.*
c *pr.* 47. *I. Elem.*
d 25. *I. Elem.*
e *ex demonſtratis.*
f 25. *I. Elem.*
g 19. *I. Elem.*
h *cor. I. pr. I. VI. Elem.*
i *pr.* 25. *I. Elem.*

BD eſt omnium chordarum (a) *maxima, angulus BAD, eiuſque ſinus, omnium angulorum, ſinuumque maximus ſit oportet :*] ideoque omnium triangulorum maximum erit per axem tranſiens, & reliqua ſubinde minora, pro ut magis ab axe recedent, minorem chordam pro baſi habentia. Si vero Angulus verticalis [*BAD*] per axem traducti trianguli obtuſus fuerit; non erit hoc triangulum omnium maximum, ſed aliud ipſo maius extra axem poterit determinari. Quadratum enim diametri BD, oppoſiti angulo obtuſo BAD, maius erit quadratis laterum (b) AB, AD; ergo aliqua chorda BL minor diametro inveniri poterit, cuius quadratum aequale ſit duobus quadratis laterum AB, & AL, ubi Angulus BAL rectus evadet (c); ideoque triangulum BAL extra axem maius erit altero per axem tranſeunte : accepto enim latere AB pro baſi, erit trianguli BAL altitudo LA, quae aequatur AD, & [*ob angulum rectum M, maiorem acuto DAM,*] maior eſt perpendiculari DM (d), quae eſſet altitudo alterius trianguli BAD per axem, nempe ſinus recti anguli DAM, conſequentis ad obtuſum BAD: & hac ratione triangulum BAL, cuius angulus rectus ſit ad verticem Coni, maius erit quolibet alio triangulo, ſive per axem, ſive extra ipſum tranſeunte, ob maximam omnium altitudinem. Quod ſi fiat extra axem triangulum BAE, cuius angulus in A fuerit acutus, aequalis DAM, conſequenti ad illum obtuſum trianguli per axem BAD, erit ipſum

a *pr.* 15. *III.Elem.*

b 12. *II. Elem.*

c *pr.*48.*I. Elem.*

d 19. *I. Elem.*

ipſum triangulum BAE aequale BAD; quia [*ſumpta AE, vel aequali AD, pro ſinu toto*] perpendicularis EN (a) aequabitur alteri DM, cum ſit ſinus anguli aequalis, tam haec, quam illa; [*quod etiam hinc conſtat, quia triangula AEN, ADM, in quibus aequantur* (b) *anguli EAN, DAM, habent rectis, ſeu aequalibus angulis ENA, DMA oppoſita aequalia latera EA, DA, adeoque aequales* (c) *quoque habebunt perpendiculares EN, DM, quae ſunt altitudines triangulorum BAE, BAD, habentium communem baſim AB; igitur triangulum BAE aequabitur BAD.*]

a *ex Trigonometria.*
b *ex hypotheſi.*
c *26. I. Elem.*

Fig. 4. & 5. III. At ſi conus fuerit Scalenus, demiſſa ex vertice A in planum baſis perpendiculari AQ, traductoque plano per axem AC, & per AQ perpendiculum, quod efficiet triangulum per axem ABD rectum (d) plano baſis BED; patet, fore omnium Coni laterum maximum AB, remotiſſimum a perpendiculo AQ, et omnium minimum latus AD, eidem perpendiculari proximum: aliorum autem laterum intermediorum AF, AE, maius eſſe, quod eſt maximo propinquius, minus vero quod ab ipſo remotius. Nam linearum ex puncto Q ad peripheriam circularem deductarum maxima eſt QB per centrum traiecta (e), minima vero eius portio QD: ipſae autem QF, QE maiores, ac minores ſunt, pro ut maximae, aut minimae propiores: quare & ipſarum quadrata maxima, & minima, ac maiora, aut minora reſpective erunt: quemadmodum etiam duo quaelibet quadra-

d *18. XI. Elem.*
e *7., & 8. III. Elem.*

ta

ta linearum QO, QE, [*attingentium terminos rectae EHO, ad diametrum BD ordinatae, ſeu perpendiculariter ductae, ideoque ob* (a) *aequales angulos OQH, EQH*] a maxima QB, hinc inde aeque remotarum, adeoque invicem (b) aequalium, aequalia erunt; Unde ſingulis addito quadrato perpendicularis AQ, reſultabit quadratum AB omnium maximum, & AD omnium minimum; & AF, AE quadrata maiora, aut minora, prout illi maximo propiora fuerint, aut remotiora: itemque AO, AE quadrata, attingentia terminos rectae EHO ad diametrum BD ordinatae, erunt aequalia. Patet igitur, maius omnibus Coni lateribus eſſe AB, & minimum AD; ac reliqua maiora, aut minora reſultare, prout magis acceſſerint, aut receſſerint a maximo; aut aequalia eſſe ſi aeque diſtent ab ipſo, ut AO, AE. Quibus, aliiſque ſimiliter ad terminos alterius ordinatae ductis, efficitur aequicrure triangulum AOE; caetera vero ſcalena ſemper reſultabunt, niſi forte contingat alicui habere baſim uni ex lateribus aequalem.

a 3. III. Elem., & 4. I. El.

b 7. III. Elem.

IV. Si quis angulus verticalis Trianguli per axem in Cono ſcaleno rectus fuerit; omnes pariter anguli verticales recti erunt, adeoque invicem aequales. Nam ſemicirculus ſuper diametro BD, in plano trianguli per axem deſcriptus, (c) per verticem A tranſiret, ob angulum rectum ibi a lateribus comprehenſum, adeoque axis AC ſemper eſſet aequalis radio baſis CB; unde in quolibet alio trian-

c ex pr. 31. III. Elem.

angulo EAF per axem tranſeunte, ſemicirculus ſuper diametro EF, in eius trianguli plano deſcriptus, per A tranſiret, propter AC aequalem radiis CF, CE, ideoque rectum (a) angulum latera quoque EA, FA continerent. Verum ſi angulus BAD acutus ſit, vel obtuſus, reliqua per axem triangula inaequales angulos ad verticem A habebunt, niſi eorum baſes hinc inde aequaliter ad diametrum BD fuerint inclinatae.

a *pr.* 31. *III. Elem.*

Fig. 6. & 7.

[*Vt autem utrumque demonſtretur, illud premitti debet, nempe ſi in duobus triangulis ABD, FNH, ad B, & N non rectangulis, nedum aequentur baſes AD, FH iiſque oppoſiti acuti, vel obtuſi anguli B, N, ſed etiam quadrata laterum AB, BD, aequalia fuerint reliquorum laterum FN, NH, quadratis; triangula aequalia erunt. Habeant primo triangula acutos angulos B, & N: ductis ad latera AB, FN perpendiculis DC, HE, erit AD quadratum, cum bis rectangulo ABC aequale quadratis* (b) *laterum AB, BD; quemadmodum etiam quadratum FH, cum bis rectangulo FNE aequabitur* (c) *quadratis laterum FN, NH: ſed quadrata AB, BD* (d) *aequantur quadratis FN, NH: igitur etiam quadratum AD, cum bis rectangulo ABC, aequatur quadrato FH, cum bis rectangulo FNE: ſed aequantur quadrata AD, FH; igitur bis rectangulum ABC, aequabitur bis rectangulo FNE, & rectangulum ABC rectangulo FNE aequale erit; quare eſt AB ad FN, ut* (e) *NE ad BC, at ob*

Fig. 6.

b 13. *II. Elem.*

c *per eandem.*

d *ex hypotheſ.*

e 16. *VI. Elem.*

ob ſimilia triangula CBD, ENH, eſt NE ad BC, ut (a) *NH ad BD; igitur ut AB ad FN, ita eſt reciproce NH ad BD, ideoque* (b) *aequabuntur triangula ABD, FNH*] a pr. 4. VI Elem. b 15. VI. Elem.

[*Sunto deinde triangulorum ABD, FNH obtuſi anguli B, & N; ductis perpendiculis DC, HE, erit AD quadratum aequale quadratis AB, BD cum bis rectangulo ABC* (c); *ſicuti etiam quadratum FH aequabitur* (d) *quadratis FN, NH, cum bis rectangulo FNE; quare cum* (e) *aequentur quadrata AD, FH, erunt quadrata AB, BD cum bis rectangulo ABC aequalia quadratis FN, NH cum bis rectangulo FNE: ſed quadrata AB, BD* (f) *aequalia ſunt quadratis FN, NH; igitur etiam bis rectangulum ABC, aquabitur bis rectangulo FNE; ideoque aequabuntur rectangula ABC, FNE, eritque* (g) *AB ad FN ut NE ad BC, vel ut NH* (h), *ad BD, ideoque* (i) *aequantur triangula ABD, FNH.*] Fig. 7. c 12. II. Elem. d per eandem. e per hypoth. f per hypoth. g 16. VI. Elem. h 4. VI. Elem. i 15. VI. Elem.

[*Hinc ſi angulus verticalis trianguli per axem BAD in Cono ſcaleno acutus ſit, vel obtuſus, reliqua per axem triangula, veluti NAK, FAE inaequales angulos ad verticem A habebunt; quippe in hiſce triangulis ad* (k) *verticem A non rectangulis, non ſolum aequantur baſes NK, FE: ſed etiam quadrata laterum AN, AK equalia ſunt* (l) *reliquorum laterum AF, AE quadratis; Igitur ſi aequales quoque forent anguli ad verticem A, utique ipſa triangula, ſicuti & reliqua omnia per axem AC traiecta* (m) *aequarentur, quod eſt abſurdum, inferius enim* (n) *independenter ab hoc numero* Fig. 4. & 5. k ex num. IV. l per ſeq. n. V. m ex praemiſſis. n per ſeq. n. VI.

quar-

quarto conſtabit, omnia haec triangula aequalia eſſe non poſſe.]

[*Si vero triangula NAK, FAE per axem traiecta, habeant baſes NK, FE ad diametrum BD aequaliter inclinatas, habebunt quoque aequales angulos ad verticem A conſtitutos; nam ob aequales angulos NCB, ECB* (a), *& KCD, FCD, aequari debent tùm arcus* (b) *NB, BE, tùm arcus KD, DF; ideoque AN, AE maximae AB, quemadmodum AK, AF minimae AD aequè propinquae erunt; aequabuntur igitur* (c) *AN, AE, atque etiam AK, AF, eruntque mutuo aequilatera triangula NAK, FAE, ideoque* (d) *habebunt aequales angulos ad verticem A conſtitutos.*]

a *ex hypoth.*
b 28. *III. Elem.*
c *nu. III.*
d 8. *I. Elem.*

V. Summae nihilominus quadratorum ex lateribus cuiuſvis trianguli per axem, erunt ſemper aequales. Nam in quovis triangulo quadrata duorum laterum aequantur duplo quadrati rectae à vertice ad dimidium baſis ductae, una cum duplo quadrati ipſius ſemibaſis, ut in noſtris geometricis inſtitutionibus demonſtravimus; [*Si enim recta BC, ducta a vertice B ad dimidium baſis C, etiam perpendiculariter baſim ſecet, erit quadratum AB aequale quadratis BC, CA* (e). *Eamdem ob cauſam quadratum BD, aequatur quadratis BC, CD; unde quadrata AB, BD, aequantur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD, vel CA: Si vero recta BC, à vertice B ad dimidium baſis C ducta, baſim AD ad angulos obliquos ſecet, ad baſim AD demittatur ex vertice B perpendicularis*

Fig. 8.
e *pr.* 47. *I. Elem.*
Fig. 9.

laris

laris BH. Quia BD quadratum aequatur quadratis laterum BC, CD minus duplo rectanguli DCH (a); *& quadratum AB aequatur quadratis laterum BC, CA plus duplo rectanguli ACH* (b), *erunt quadrata BD, BA, aequalia quadratis BC, CD, una cum quadratis BC, CA minus duplo rectanguli DCH plus duplo rectanguli ACH: eſt autem CA* (c) *aequalis CD, proindeque rectangulum ACH aequale eſt rectangulo DCH, ergo quadrata laterum BD, BA aequantur duplo quadratorum BC, CD, minus duplo rectanguli DCH, plus duplo rectanguli DCH, ſeu aequatur duplo quadrati BC, una cum duplo quadrati CD.*] Itaque [*cum in triangulo BAD axis AC biſecet baſim BD in puncto C*,] duo quadrata AB, AD aequantur duplo quadrato axis AC, cum duplo quadrato radii CB; item [*eamdem ob cauſam*] duo quadrata AE, AF aequabuntur duplo quadrato eiusdem axis AC, & duplo quadrato radii CE, ipſi CB aequalis; ergo duo quadrata AB, AD aequantur duobus quadratis AE, AF: [*eodem ratiocinio quadrata AB, AD oſtenduntur aequalia duobus quadratis AN, AK; igitur quadrata AN, AK aequantur quadratis AE, AF, atque ita porrò.*]

a 13. *II. Elem.* b 12. *II. Elem.* c *ex hypoth.* Fig. 4. & 5.

VI. Horum autem triangulorum per axem, minimum erit BAD (d) rectum plano baſis, [*utpote*] tranſiens per AQ perpendiculum; & maximum erit EAF, cuius baſis EF ſit alteri diametro BD perpendicularis: aliorum autem PAL magnitudo erit intermedia, ita ut maiora evadant, quae maximo pro-

Fig. 10. & 11. d 18. *XI. Elem.*

propiora fiunt. Si enim ſuper recta CQ, inter axem, & perpendiculum, velut ſuper diametro, circulus CSQ, in plano baſis Coni, deſcribatur, hic erit locus omnium perpendicularium, ex vertice A ad baſes quorumlibet triangulorum per axem tranſeuntium, demiſſarum. Nam ECF perpendicularis dia-
a *pr.* 16. metro BD, tanget circulum QSC in C (a);
III. El. & triangulum EAF aequalia latera habebit
b *per nu.* AE, AF (b); ideoque AC bifariam ſecans
III. baſim trianguli aequicruris, erit ipſi per-
c *pr.* 8. pendicularis (c): ubi vero alia diameter PL
I. Elem. ſecat illum circulum in S, ducta ex vertice AS, erit ipſi PL pariter perpendicularis:
d 31. *III.* quia iuncta QS, erit quadratum QC aequa-
Elem. & le quadratis CS, QS (d): quare quadratum
47. *I. E-* AC, quod aequatur quadratis AQ, & QC (e),
lem. erit aequale quadratis AQ, QS, SC: at
e *Per* 47. quadratis AQ, & QS eſt aequale (f) qua-
I. Elem. dratum AS, ergo quadratum AC aequatur
f *per ean-* quadratis AS, & SC, ideoque angulus ASC
dem. rectus erit (g). Quia ergo rectarum ex A ad
g *pr.* 48. peripheriam circuli QSC ductarum (ut de la-
I. Elem. teribus (h) Coni dictum eſt) maxima erit AC,
h *nu. III.* minima AQ, & intermedia AS mediocris magnitudinis; pro maiori acceſſu ad maximam AC creſcentis; ideo maximum erit triangulum AEF, cuius altitudo AC, minimum BAD, cuius altitudo AQ; intermediae vero magnitudinis PAL, cuius altitudo AS.

Fig. 12. VII. Triangula vero extra axem, licet in Cono recto, cuius axis aequalis, aut maior ſit radio baſis, nempe in quo angulus verticalis trianguli per axem BAD rectus ſit,

ſit, vel acutus, minora ſemper oſtenſa ſint quovis triangulo per axem tranſeunte (a): in Cono tamen ſcaleno, ſive obtuſus ſit, ſive rectus, aut acutus ille angulus verticalis trianguli per axem BAD, aut EAF, vel PAL, triangula tamen extra axem haberi poſſunt, tum quolibet illorum minora, tum quaedam etiam maximo FAE maiora, aut aequalia. Ipſi enim EF parallela GO duci poteſt, ordinata ad diametrum BD in H, & ſupra ipſam ducto per verticem A plano; ſi efficiatur triangulum GAO, quod aequicrure erit (b), eiuſque perpendicularis evadet recta AH, fieri poteſt, ut [*minor*,] vel aequalis, vel maior ſit ratio ipſius AH ad axem AC, comparata rationi EF ad GO, ſeu CE ad GH; ideoque poteſt eſſe triangulum GAO [*minus*, *vel*] aequale, vel maius ipſo AEF, quod erat maximum omnium per axem AC tranſeuntium. [*Tria nobis ſunt in praeſentia demonſtranda, primum nempe, in Cono Scaleno triangulum aequicrure GAO haberi poſſe extra axem, quod minus ſit triangulo EAF, maximo omnium per axem ſcilicet tranſeuntium: Secundum, triangulum etiam aequicrure extra axem haberi poſſe, quod maius ſit eodem triangulo EAF: Tertium, poſſe aequicrure triangulum extra axem haberi, quod aequet triangulum EAF.*]

a *numer. III.*

b *per numer. III.*

[*Vt a primo exordiar, obſervandum imprimis eſt, quod ſi in triangulo rectangulo BAG ex uno angulo G ad AB ducatur recta GD, haec ad DA maiorem rationem habebit, quam GB ad BA; ducatur enim recta DE* Fig. 13.

a 16. I. Elem. *ipſi BG parallela; & quia rectus eſt angulus DAE, angulus externus DEG* (a) *obtuſus erit; maior ergo eſt DG, quam DE* (b), b pr. 19. I. Elem. *& idcirco GD ad DA maiorem rationem habet, quam ED ad DA* (c), *hoc eſt quam GB ad BA* (d).] c 8. V. Elem.

d cor. I. prop. 4. VI. El. [*Deinde in triangulo rectangulo BAG, ſi producta hypothenuſa BG ad punctum quodvis D, iungatur AD; erit BG ad GA in maiori ratione, quam BD ad DA; ducta enim GO parallela DA; in triangulo rectangulo GAO erit GO* (e) *maior GA; quare BG ad GA maiorem* (f) *habet rationem, quam BG ad GO: ſed BG ad GO eſt, ut BD* (g) *ad DA; ergo GB ad GA habebit maiorem rationem, quam BD ad DA.*]

Fig. 14. e 19. I. Elem. f 8. V. Elem. g cor. I. prop. 4. VI. El.

[*Tandem ſi recta A ad B maiorem rationem habeat, quam G ad DE; erit rectangulum ſub extremis A, & DE factum, maius rectangulo mediarum B, & G. Quoniam A eſt ad B in maiori ratione, quam G ad DE, fiat, ut A ad B, ita G ad DZ, quae minor erit DE* (h); *rectangulum igitur* (i) *ſub A, & DZ aequale erit rectangulo ſub G, & B: rectangulum verò ſub A, & DE maius eſt rectangulo ſub A, & DZ; ergo rectangulum ſub A, & DE maius eſt rectangulo ſub G, & B.*]

Fig. 15. h pr. 10. V. El. i 16. VI. Elem.

[*Hiſce praemiſſis ad inſtitutum iam venio. Eſto Conus ſcalenus, cuius axis AC declinat a radio CB, ſeu conſtituat cum illo obtuſum angulum ACB. In plano trianguli BAD per axem, & perpendiculum tranſeuntis, ipſi BD erigatur perpendicularis CM: Quoniam*

Fig. 16.

BM maior eſt radio BC (a), *eſto MZ aequalis EC, & ducantur ZH, HN parallelae rectis MC, ZM, adeo ut emergat parallelogrammum MZHN, cuius oppoſita latera HN, ZM* (b) *aequari debent. Demum in plano circuli agantur ECF, GHO ad diametrum BD normales, iunganturque CG, AO, AG, AE, AF; triangulum GAO minus erit triangulo EAF; nam quadratum HN aequatur quadratis* (c) *NC, CH, ſicuti etiam CG quadratum aequale eſt quadratis GH, HC: eſtque HN quadratum* (d) *aequale quadrato CG; ergo quadratum HC, cum quadrato CN aequatur HC quadrato, cum quadrato HG, ideoque CN quadratum aequabitur quadrato HG, ſeu CN aequalis erit HG; igitur HN ad NC erit, ut CG ad GH, vel ut CE ad GH: ſed ex praemiſſis eſt HN ad NC in maiori ratione, quam HK ad KC, & HK ad KC in ratione maiori, quam HA ad AC; ergo CE ad GH eſt in multò maiori ratione, quam HA ad AC, ideoque rectangulum ACE maius erit rectangulo AHG: eſt autem triangulum* (e) *iſoſceles EAF, cuius altitudo AC, aequale* (f) *rectangulo ACE, ſicuti etiam triangulum iſoſceles* (g) *GAO aequatur rectangulo AHG; igitur triangulum EAF maius erit triangulo GAO.*]

a 19. I. Elem.
b 34. I. Elem.
c 47. I. Elem.
d ex conſtruct.
e numer. III.
f ex pr. 41. I. Elem.
g per eamdem.

[*Quod etiam in Cono ſcaleno dari queat triangulum extra axem, quod triangulo maximo omnium, per axem tranſeuntium, ſit maius, demonſtrare iam pergo: id vero quamvis generatim oſtendi poſſit, ſive Coni axis ſit minor, vel maior, aut aequalis radio baſeos eiusdem Coni; brevitatis tamèn gratia*

 prae-

praeſtat in primo tantùm caſu theorèma oſtendere, dum alias reliquorum caſuum demonſtrationes apud Serenum Antiſenſem videre licet. Itaque eſto Conus Scalenus, cuius A-
Fig. 12. xis AC ſemidiametro baſis minor, aptetur HA aequalis ſemidiametro BC, vel CD, perque puncta C, H traiiciantur in baſi circulari rectae EF, GO ad rectos angulos diametro BD inſiſtentes; triangulum aequicrure OAG maius erit triangulo FAE. Fiat angulo AHC aequalis HCK, & iungatur HK. Quia in triangulis CAH, CKH latera AH,
a ex conſtruct. HC aequantur lateribus CK, CH, & angulus AHC aequatur angulo HCK (a), erit
b 4. I. Elem. tùm AC (b) aequalis HK, tùm obtuſus angulus ACH aequalis angulo CHK, qui proin-
c 7. III. Elem. de obtuſus erit, maiorque recto CHG, ideoque (c) HG maior erit HK. Deinde cum AH,
d ex conſtruct. CE (d), itemque (e) AC, HK ſint aequales, erit AH ad AC, ut CE ad HK: ſed CE
e ex demonſtr. ad HK maiorem (f) habet rationem, quam CE ad HG; ergo etiam AH ad AC eſt in
f 8. V. Elem. maiori ratione, quàm CE ad HG, ideoque (g) rectangulum AHG, ſeu triangulum OAG
g ex praemiſſis. maius erit rectangulo ACE, ſeu triangulo FAE.]

[Cum igitur in Cono ſcaleno dari queant triangula extra axem, quae baſim habeant inter extremitates C, B radii CB, à quo axis AC declinat, quorum alterum ſit minus, alterum maius maximo FAE per axem AC tranſeuntium; liquet, aliud triangulum inter utrumque haberi poſſe, quod maximo FAE ſit aequale.]

Sc-

Verum haec de triangularibus Coni ſectionibus indicaſſe ſufficiat: Iam de curvis ſectionibus Conicis eſt deinceps agendum.

PROPOSITIO I.

SI Conus ABD, aut illi ad verticem oppoſitus, ſecetur plano baſi BED parallelo, Fig. 17.
ſectio FHG, aut fhg circulus erit.

Ducatur axis AC, occurrens plano ſecanti in puncto L, & per axem idem Conus ſecetur plano triangulari ABD, cuius
& prioris plani ſecantis communis ſectio a 16. *XI.*
FG parallela (a) erit diametro baſis BD; ac *Elem.*
ſumpto quolibet puncto H in perimetro ſectionis, iuncta ad verticem AH protrahatur ad b 16. *XI.*
peripheriam baſis in E; ac iungantur EC, HL, *Elem.*
[*quae* (b) *erunt invicem parallelae*]; nam ſunt communes ſectiones plani trianguli ACE
cum illis parallelis planis BED, FHG, ideo c *cor. I.*
ſimilia erunt triangula ACE, ALH (c): item- *prop.* 4.
que [*BC, FL cum ſint communes ſectiones* *VI. El.*
plani trianguli ACB cum illis parallelis pla- d 16. *XI.*
nis BED, FHG, erunt invicem (d) *parallelae*, *Elem.*
lae, adeoque etiam erunt] ſimilia [*trian-* e *cor. I.*
gula] CBA, LFA (e); propterea erit CE *prop.* 4.
ad LH, ut CA ad LA; & ut CA ad LA, *IV. El.*
ita (f) BC ad FL; quare (g) CE ad LH eſt, f *cor. I.*
ut BC ad FL: ſed radius CE aequatur radio *prop.* 4.
BC, ergo & LH aequatur (h) ipſi FL. Et *VI. El.*
eodem modo oſtendetur, quamlibet aliam re- g 11. *V. E-*
ctam iungentem quodvis punctum perimetri *lem.*
huius ſectionis cum puncto L, aequari eidem h 14. *V.*
Elem.

Digitized by Google

FL; ergo haec ſectio circulus erit, cuius centrum L, quippe omnes rectae hinc ad perimetrum ſectionis ductae, oſtenduntur aequales. [*Eodem prorſus ratiocinio, ſi loco punctorum F, H, G, L, planique FHG ſubſtituantur in demonſtratione puncta f, h, g, l, planumque fhg, demonſtrabitur, ſectionem fhg circulum eſſe.*] Q.E.D.

COROLLARIVM.

Hinc axis Coni AC tranſit per centra quaelibet L, omnium circulorum, quibus aequidiſtanter baſi Conus ſecatur; idque etiam in alio oppoſito Cono Agf contingit.

PROPOSITIO II.

Si Conus ſcalenus ABED ſecetur plano per axem tranſeunte, ad baſim recto ABD; mox altero plano KHM ad illud planum
Fig. 18. ABD recto iterum ſecetur per rectam KM, quae triangulum KAM efficiat ſimile ipſi BAD, ſed ſubcontrarie poſitum, ut nempe ſit angulus AKM aequalis ADB, un-
a cor. 9. de & alius AMK erit (a) alteri ABD aequa-
pr. 32. lis, ob angulum A utrique triangulo commu-
I. Elem. nem: haec quoque ſectio circulus erit.

Ducta ex quolibet puncto H perimetri huius ſectionis recta HI, quae ſit perpendicularis plano ABD, atque in communem plano-
b 38. XI. rum ſectionem KM incidet (b), agatur per I
Elem. recta FIG parallela diametro baſis BD; ac per ipſas

ipſas FG, HI ducatur planum FHG, quod erit parallelum (a) plano baſis tranſeunti per BD, & per ER huic perpendicularem, quae erunt ipſis FG, HI parallelae; [*quippe cum planum baſis BED ſit* (b) *rectum plano trianguli BAD, etiam ER, quae perpendicularis eſt* (c) *ad communem ſectionem BD, recta* (d) *erit plano trianguli BAD, cui cum ſit recta quoque HI* (e), *aequidiſtabunt ER, HI* (f), *quemadmodum mutuo aequidiſtant* (g) *BD, FG:*] Quare Sectio (h) FGH erit circulus, cuius centrum L in axe, ubi ſecat eius diametrum FG: & biſariam pariter ſecta KM in O, iungantur HL, HO; erit quadratum HL aequale quadrato alterius radii GL, ideſt rectangulo FIG, cum quadrato LI (i): ſed [*ob HI rectam plano* (k) *trianguli BAD, adeoque normalem* (l) *ad FIG;*] idem quadratum HL aequatur quadratis HI, & LI (m); ergo [*rectangulum FIG, cum quadrato LI aequale eſt quadratis HI, LI, unde*] quadratum HI aequatur rectangulo FIG. Sed ob angulum AKM aequalem ADB (n), adeoque etiam angulo externo parallelarum MGI (o), & angulos ad verticem I aequales KIF, GIM (p), ſimilia ſunt (q) triangula FIK, GIM; unde KI ad IF eſt, ut GI ad IM, adeoque rectangulum FIG aequatur rectangulo KIM (r); ergo quadratum HI, [*quod oſtenſum eſt aequale rectangulo FIG,*] aequatur etiam rectangulo KIM: & addito quadrato IO, erunt quadrata HI, & IO, aequalia rectangulo KIM, cum quadrato IO; ideſt [*ob rectum angulum* (ſ) *HIO,*] quadratum OH (t) aequa-

a 15. XI. *Elem.*
b *ex hypoth.*
c *ex conſtruct.*
d *def.* 4. *XI. El.*
e *ex conſtruct.*
f 6. *XI. Elem.*
g *ex conſtruct.*
h *ex pr. I.*
i 5. *II. El.*
k *ex conſtruct.*
l *def.* 3. *XI. El.*
m 47. *I. Elem.*
n *ex hypoth.*
o 27. *I. El.*
p 11. *I. El.*
q 4. *VI. Elem.*
r 16. *VI. Elem.*
ſ *def.* 3. *XI. El.*
t 47. *I. Elem.*

a 5. *II. Elem.* aequabitur quadrato OM (a); eſt igitur recta OH aequalis OM; & de qualibet recta ex alio puncto perimetri KHM ad idem punctum O ducta idem demonſtrabitur; ergo haec quoque ſectio eſt circulus cuius centrum O. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. HInc habetur, quod in circulo quadratum perpendicularis ductae ad diametrum ex quolibet puncto circumferentiae, aequatur rectangulo ex partibus diametri ab ipſa diviſis, nempe HI quadratum aequatur rectangulo FIG in circulo GHF: & viciſſim ſi in aliqua figura KHM, quadratum cuiuſvis perpendicularis ex perimetro ad baſim ductae HI aequatur rectangulo partium baſis KIM; haec figura erit circulus, cuius diameter ipſa baſis KM.

II. Si planum ſecans, neque ſit parallelum baſi, neque ſubcontrarie poſitum triangulum abſcindat ſimile triangulo per axem ad baſim recto, ſectio non erit circulus; quia ob inaequalitatem angulorum, triangula FKI, MGI non erunt ſimilia, nec erit KI ad IF, ut GI ad IM; unde rectangulum FIG, ſeu quadratum HI, non aequabitur rectangulo KIM; & addito quadrato IO, non evadet quadratum OH aequale OM, adeoque radii non erunt aequales.

III. Quoniam in hiuſmodi ſubcontraria ſectione triangula per axem AKM, BAD b 4. *VI. Elem.* ſunt (b) ſimilia, ideoque DA ad AB eſt, ut

AK

AK ad AM: rectangula DAM, BAK ſunt
aequalia (a), & circulus per puncta B, K, a 16. *VI.*
M, D tranſire poſſet; [*ſi enim circulus,* *Elem.*
qui tranſit per puncta B, D, M (b), *non* b 5. *IV.*
tranſiret quoque per K, non eßet rectangu- *Elem.*
lum BAK aequale rectangulo (c) *DAM.*] c *cor. I.*
Ducta vero BN eidem KM parallela, circu- *pr.* 36.
lus triangulo DNB circumſcriptus, tange- *I. Elem.*
retur a latere AB in B; Quia [*ob angu-* d 27. *I.*
lum ABN aequalem angulo AKM (d) *ſeu* *Elem.*
ADB (e), *& angulum BAN aequalem angulo* e *per hy-*
BAD,] triangulorum ADB, ABN ſimilitu- *poth.*
do (f) dat AD ad AB, ut AB ad AN; ideo- f 4. *VI.*
que AB quadratum rectangulo DAN aequale *Elem.*
redditur (g), unde AB fit tangens (h) circu- g 17. *VI.*
li per B, N, D tranſeuntis. *Elem.*

IV. Et quia omnes ſectiones ipſi circu- h 37. *III.*
lo KHM parallelis planis effectae, pariter *Elem.*
circuli erunt, iuncta ex Coni vertice A ad
centrum O recta AO, per centra omnium
circulorum ipſi aequidiſtantium tranſibit;
quippe omnes rectas KM parallelas bifa- i *cor.* 2.
riam (i) ſecabit, ut ipſa ſecatur in O, & *prop.* 4.
BN in S; unde erit alius axis huius Coni re- *VI. El.*
cta AO, ſecans tamen inaequaliter diame-
trum baſis in R. Ideo in Conis ſcalenis e-
runt bini axes AC, AR, per circulorum
ſuorum centra deducti; quando Coni recti u-
nicum habent eiuſmodi axem.

V. Secabitur autem ab hoc axe ſecundario
diameter baſis in R, ut ſit BR ad RD, quem-
admodum lateris AB quadratum ad quadratum
DA, ſeu quadratum rectae AN ad quadratum la-
teris AB, [*ob AB ad AD, ut* (k) *AN ad AB*]: k *ex co-*
axis *roll. III.*

axis vero primarius AC ſecabit diametrum circuli ſubcontrarie poſiti, velut BN in Q, ita ut ſit BQ ad QN, ut quadratum AB ad AN quadratum, [*vel invertendo QN ad BQ, ut quadratum AN ad AB quadratum, vel* (a) *ut BR ad RD;*] ideoque BR ad RD erit (b) ut NQ ad BQ. Nam ducta NPT parallela BD, erunt (c) ſimilia triangula BSR, NST, & [*BS ad SN erit, ut BR ad NT; unde*] ut BS aequatur SN, (d) ita BR aequabitur NT; ergo BR ad RD eſt, ut TN ad RD, ſcilicet ut (e) AN ad AD, quae (f) ſunt, [*ut rectangulum DAN ad quadratum AD, vel*] ut quadratum AB (g) ad quadratum AD, quia oſtenſae ſunt AN, AB, AD continue proportionales: ſimiliter BQ ad QN erit, ut BC, ad NP (ob ſimilia triangula BQC, PNQ,) ſive ut DC, quae aequatur BC, ad NP, id eſt (h) DA ad AN, nempe [*ut quadratum DA ad* (i) *rectangulum DAN, vel ut quadratum DA ad* (k) *quadratum AB aut*] ut quadratum AB ad quadratum AN, [*quia oſtenſae ſunt AN, AB, AD, continue proportionales.*]

a *ex ſuperius dictis.*
b *II. V. Elem.*
c *4. VI. Elem.*
d *ex Coroll. IV.*
e *cor. I. prop. 4. VI. El.*
f *ex pr. I. VI. El.*
g *ex pr. 17. VI. Elem.*
h *cor. I. prop. 4. VI. El.*
i *ex pr. I. VI. El.*
k *17. VI. Elem.*

PROPOSITIO III.

Fig. 19. SI Conus ABD triangulo per axem tranſeunte ſecetur, tum ex quovis puncto H ſuperficiei Conicae agatur recta HIL parallela cuidam EF, quae diametro baſis Coni BD ſit perpendicularis; dico rectam illam HIL occurrere plano ipſius trianguli per axem, & inde ad alteram ſuperficiei Conicae partem in

in L ita protendi, ut in dicto occurſu I cum plano trianguli bifariam ſecta remaneat, nempe ut HI aequetur IL.

Iuncta enim ex vertice Coni A recta AH producatur uſque dum peripheriae baſis occurrat in M, & ex M in plano baſis ducta MKG parallela ipſi EF, diametrum perpendiculariter ſecante, & ab ipſo bifariam diviſa in K (a), iungatur quoque recta AG, quae iacens in ſuperficie Conica conveniet cum ipſa HIL in L. Etenim HL, MG aequidiſtantes tertiae EF, ſunt parallelae (b) inter ſe, adeoque in eodem plano trianguli AMG; [*hinc ſicuti AG convenit cum MG in Conicae ſuperficiei puncto G, ita eadem AG conveniet cum HIL in Conicae ſuperficiei puncto L;*] & iuncta AK erit communis (c) ſectio plani trianguli per axem BAD, & plani alterius trianguli AGM, unde per punctum I tranſibit, utrique plano (d) commune. Quia ergo erit MK ad HI, ut (e) KA ad AI, & ut GK ad IL; eſtque MK aequalis GK (f), erit quoque HI aequalis IL; ergo HL ab ipſo plano per axem bifariam ſecatur. Q. E. D.

a 3. *III. Elem.*
b 9. *XI. Elem.*
c 3. *XI. Elem.*
d *ex hypoth.*
e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f *ex demonſtr.*

COROLLARIA.

I. HInc habetur, quod ſi Conus triangulo per axem ſectus, alio plano per rectam MG diametro baſis perpendiculariter tranſeunte, iterum ſecetur, cuius & alterius plani communis ſectio ſit recta NK; haec bifariam ſecabit omnes lineas, veluti HL, in eadem Fig. 20.

eadem ſectionè ductas ipſi MG parallelas; [*Singulae enim plano trianguli BAD, vel huius, & plani MNG communi ſectioni NK ita occurrent, ut ab ipſa* (a) *bifariam dividantur.*]

a *ex hac prop.*

II. Et ſi eadem recta MG, per quam planum GNM deducitur, nedum ſit perpendicularis diametro BD, ſed etiam plano trianguli per axem (quod evenit, ubi triangulum per axem eſt (b) rectum ad planum baſis;) tunc rectae illae MG, HL non ſolum bifariam, ſed etiam ad rectos angulos ſecabuntur ab illa communi ſectione KN: quippe non tantum angulus MKD rectus erit, ſed etiam MKN (c), & illi aequalis HIN (d). Vbi vero recta MKG non fuerit perpendicularis plano trianguli per axem, ſeu niſi triangulum per axem ſit (e) rectum plano baſis, tranſeundo per rectam ex vertice Coni A ductam baſi perpendicularem; tunc NK bifariam (f) quidem ſecabit rectas illas parallelas HI, GM, ſed ad angulos obliquos, non autem rectos, iuxta (g) inclinationem lineae MK ad ipſam KN.

b 18. *XI. Elem.*
c *def.* 3. *XI. El.*
d 27. *I. Elem.*
e 18. *XI. Elem.*
f *ex hac prop.*
g 27. *I. Elem.*

Fig. 21. 22. 23. 24.

DEFINITIONES SECUNDAE.

I. Ipſa linea KN, bifariam ſecans omnes rectas HL eidem MG parallelas, in qualibet ſectione GNM ductas, eius ſectionis *diameter* vocabitur.

II. Et diametri terminus N (vel etiam ſi terminus alius Q ipſi oppoſitus fuerit, etiam Q) *vertex* ſectionis dicetur.

III. Ipſae

III. Ipſae autem ſectae HL, MG (vel etiam earum medietates HI, MK) *ordinatae* ad ipſam diametrum NK appellantur.

IV. Quod ſi nedum bifariam, ſed etiam perpendiculariter ſecentur ordinatae a diametro, praeter generale *diametri* vocabulum, ſpeciale nomen *axis* eidem diametro tribuetur.

[V. *Si recta AD ita dividatur in B, C, ut ſit tota AD ad utramvis extremam partem CD, ut reliqua extrema AB ad medium BC: recta AD* harmonice *diviſa dicitur in punctis A, B, C, D, quae idcirco* harmonicalia *nuncupantur.*] Fig. 25.

Aliae definitiones in ſequentibus aliquibus propoſitionibus, & earum Corollariis quibusdam deſignabuntur.

PROPOSITIO IV.

SI Conus ADMB plano per axem ſectus, alio plano MNG ſecetur, per rectam MG diametro circuli baſis perpendicularem, a qua bifariam ſecatur ipſa in K, & per rectam KN, uni ex lateribus AB trianguli per axem parallelam, deducto; erunt in huiuſmodi ſectione quadrata ordinatarum MK, HI proportionalia abſciſſis a vertice ſectionis N portionibus diametri NK, NI. Vocetur autem huiuſmodi ſectio *Parabola*. Fig. 26.

Per quodlibet punctum I communis ſectionis KN, cui eſt ordinata HIL, ducta PIV parallela diametro baſis BD; ſi agatur per

ipſas

ipſas VP, HL planum PHV, quod erit parallelum baſi, per BD, MG illis aequidiſtantes tranſeunti (a), adeoque circulum efficiet (b), unde [*ob rectum angulum PIH, utpote aequalem recto BKM* (c),] reſultabit quadratum HI aequale rectangulo PIV, ut quadratum MK aequatur (d) rectangulo BKD, ergo quadratum MK ad quadratum HI eſt, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV, ſcilicet ut KD ad IV (e); nam BK (f) aequatur PI, cum ſit BPIK parallelogrammum lineis oppoſitis aequidiſtantibus comprehenſum: Eſt autem KD ad IV, ut KN ad IN, ob ſimilia triangula (g) NKD, NIV; ergo quadrata ordinatarum MK, HI, ſunt ut partes diametri a vertice abſciſſae NK, NI. Q. E. D.

a 15. *XI. Elem.*
b *ex pr. I.*
c 10. *XI. Elem.*
d *ex cor. I. pr.* 2.
e *I. VI. Elem.*
f 34. *I. Elem.*
g *Coroll. I. pr.* 4. *VI. El.*

Nomen autem huius ſectionis, hanc proprietatem habentis, eſt *Parabola*.

COROLLARIA.

I. HInc habetur, quod ſi fiat ut NK, ad KM, ita KM ad aliam NF, vertici N diametri NK perpendiculariter applicatam; ut quadratum MK erit aequale rectangulo KNF (h), ita cuiuſvis alterius ordinatae HI quadratum erit aequale rectangulo INF: quia haec rectangula [*KNF*, *INF*] eamdem altitudinem NF habentia ſunt, ut abſciſſae KN, IN (i), adeoque ut ordinatarum quadrata MK, HI illis (k) proportionalia; [*eſt autem rectangulum KNF quadrato MK aequale; ergo & rectangulum INF* (l) *aequabitur HI quadrato*.] Et haec conſtans

h 17. *VI. Elem.*
i 1. *VI. Elem.*
k *per hanc prop.*
l 14. *V. Elem.*

linea

linea NF ab antiquis *Latus rectum*, a recentioribus *Parameter Parabolae* appellatur.

II. Ducta quoque NE diametro baſis Coni parallela, lateribus trianguli per axem terminata, ſi fiat ut NK ad KD, vel [*ut* (a) *AB ad BD*, *aut*] ut AE (b) ad EN, ita EN ad NF; erit eadem NF latus rectum, ſeu parameter ipſius parabolae. Nam BK (c) aequalis EN (ob parallelogrammum BENK), erit ad NF, ut AE ad EN, ſive (ob ſimilia triangula AEN, NKD), ut NK ad KD; & ideo (d) rectangulum BKD, ideſt quadratum MK (e), aequabitur rectangulo KNF; [*ideoque erit* (f) *NF parameter*.]

III. Idem parameter NF reperitur, ſi fiat, ut rectangulum laterum trianguli per axem BAD ad quadratum baſis BD, ita AN ad NF; Nam rectangulum BAD ad quadratum BD eſt [*in ratione* (g) *compoſita ex rationibus AB ad BD, & AD ad BD*, *ſeu*(h) *ex rationibus AE ad EN, & AN ad EN*, *ſeu*] ut rectangulum (i) EAN ad quadratum EN: ſed (k) quadratum EN aequatur rectangulo EA in NF parametrum, (cum ſint lineae (l) EA, EN, NF continue proportionales); ergo BAD rectangulum ad BD quadratum eſt, ut EAN rectangulum ad EA in NF, adeoque (m) ut AN ad NF, ob communem horum rectangulorum altitudinem EA.

a *cor. I. prop. 4. VI. El.*
b *per idem Coroll.*
c *34. I. Elem.*
d *16. VI. Elem.*
e *cor. 1. prop. 2.*
f *ex Coroll. I.*
g *cor. 2. pr. 23. VI. El.*
h *cor. 1. prop. 4. VI. El.*
i *cor. 2. prop. 23. VI. El.*
k *17. VI. Elem.*
l *ex Coroll. praeced.*
m *I. VI. Elem.*

PROPOSITIO V.

Iiſdem poſitis, ut in praecedenti propoſitionis titulo, ſed communi Sectione trianguli per axem, & plani ſecantis per rectam

Fig. 27.

MKG diametro baſis perpendicularem tradu-ﬀi, non iam aequidiſtante uni laterum trianguli per axem, verum ita inclinata, ut cum uno latere AD infra verticem A Coni ad punctum N, & cum altero latere AB ſupra verticem A conveniat ad punctum Q; ordinatarum Sectionis MNG quadrata MK, HI erunt, ut rectangula QKN, QIN diametri partibus inter eaſdem ordinatas, & utrumque terminum N, Q diametri ipſius interiectis comprehenſa. Eodemque plano ad alteram oppoſitam ſuperficiem Conicam producto, ſimilis ſectio lQh inde reſultabit, cuius ordinatarum quadrata, ſive invicem, ſive cum quadratis ordinatarum inferioris ſectionis MNG comparata, erunt pariter, ut rectangula diametri partibus, inter ipſas, & utrumque verticem Q, N poſitis, comprehenſa.

Vocentur autem ambae *ſectiones oppoſitae*, & utraque ipſarum *Hyperbola*, ac diametri portio NQ, utrique vertici interiecta, *Latus tranſverſum* nuncupetur.

Ducta per punctum I, ubi quaelibet ordinata HI ad diametrum NK Sectionis huius applicatur, recta PIV diametro baſis BD parallela; utique planum per ipſas VP, HIL traductum, utpote baſi DMB aequidiſtans, efficiet circulum HVP (a); adeoque quadratum MK ad quadratum HI erit, ut rectangulum BKD ad rectangulum PIV; quorum (b) ratio componitur ex ratione BK ad PI, quae eadem eſt KQ (c) ad QI, & ex ratione DK ad

a *ex pr. I.*

b *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

c *cor. 1. prop. 4. VI. El.*

ad VI, quae eadem (a) eſt KN ad NI; [*igitur eſt quadratum MK ad HI quadratum in ratione compoſita ex ratione KQ ad QI, & ex ratione KN ad NI*;] quemadmodum, & ratio rectanguli QKN ad rectangulum QIN ex iisdem (b) rationibus componitur: quare eſt quadratum MK ad quadratum HI, ut QKN ad QIN. Idemque probabitur de ordinatis ſuperioris oppoſitae ſectionis lQh, [*atque de ordinatis MK, hi ad ſectiones oppoſitas MNG, hQl ſpectantibus; eſt quippe quadratum MK ad quadratum hi* (c), *ut rectangulum BKD ad rectangulum piu, ſeu in ratione* (d) *compoſita ex ratione BK ad pi, quae eadem eſt* (e) *KQ ad Qi, & ex ratione KD ad iu, quae eadem eſt* (f) *KN ad Ni; Igitur quadratum MK eſt ad quadratum hi in ratione compoſita ex ratione KQ ad Qi, & ex ratione KN ad Ni, ſeu ut rectangulum* (g) *QKN ad QiN*]; unde conſtat propoſitum. Vocatur autem quaelibet ex hiſce oppoſitis Sectionibus *Hyperbola*, & diametri portio QN *Latus tranſverſum* nuncupatur.

a *cor. I. prop. 4. VI. El.*

b *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

c *cor. I. pr. 2.*

d *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

e *4. VI. Elem.*

f *per eamdem.*

g *cor. 2. pr. 23. VI. El.*

COROLLARIA.

I. SI fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, ad punctum K diametri NK perpendiculariter applicanda, & iuncta QZ, ad ipſam producantur rectae NF, IS parallelae KZ; ipſa NF ex vertice N ducta *Latus rectum*, ſive *Parameter* hyperbolae erit: cui haec proprietas convenit, quod ut quadratum MK mediae

proportionalis inter NK, & KZ, aequatur rectangulo NKZ, quod parametro NF applicatur, ſed cum exceſſu rectanguli FIZ ſimilis QNF (a) rectangulo, ex latere tranſverſo QN; & recto NF comprehenſo; ac ſimiliter quadratum cuiuſvis alterius ordinatae HI aequabitur rectangulo NIS, eidem parametro NF applicato, ſed (ducta FRY parallela NK, ſecante IS, KZ in R, Y) cum exceſſu rectanguli FRS, pariter (b) ſimilis dicto rectangulo QNF. Nam quia KZ ad IS eſt, ut (c) KQ ad QI, ratione KN ad NI utrinque adiecta, [*erit ratio compoſita ex rationibus KZ ad IS, & KN ad NI eadem ac ratio, quae componitur ex rationibus KQ ad QI, & KN ad NI: ſed ratio compoſita ex rationibus KZ ad IS, & KN ad NI eſt ratio, quam habet rectangulum ZKN* (d) *ad rectangulum NIS; & ratio compoſita ex rationibus KQ ad QI, & KN ad NI, eſt illa, quam habet* (e) *rectangulum QKN ad rectangulum QIN, igitur*] erit rectangulum ZKN ad rectangulum NIS, ut rectangulum QKN ad QIN, ſive (f) ut MK quadratum ad HI quadratum; unde, ut MK quadratum aequatur ZKN, ita HI quadratum aequatur NIS.

a 24. *VI. Elem.*
b *per eamdem prop.*
c *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*
d *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
e *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
f *per hanc prop.*

II. Item ſi fiat, ut NK ad KB, ita KD ad KZ, iuncta, ut ſupra, QZ, cui occurrat in F recta NF ipſi KZ parallela, erit NF eadem parameter; nam [*cum ſit NK ad KB, ut KD ad KZ*,] ZKN rectangulum (g) aequabitur BKD, adeoque & KM (h) quadrato, unde etiam NIS aequabitur (i) quadrato HI.

g 16 *VI. Elem.*
h *cor.* 1. *pr.* 2.
i *Coroll. preced.*

III. Si-

III. Similiter ducta NE parallela DB, ſi fiat ut NK ad KD, ita NE ad NF, erit haec parameter: nam iuncta QF, ac producta, ut ſecet rectas IS, KZ eidem NF parallelas in S, & Z, [*ob parallelas EN, BK, itemque NF, KZ,*] erit tam BK ad NE, quam KZ ad NF in eadem ratione (a) KQ ad QN, unde [*BK ad NE eſt, ut KZ ad NF* (b), *& permutando,*] BK ad KZ, ut NE ad NF, ſive (c) ut NK ad KD; & ideo rectangulum BKD, quod idem eſt cum quadrato (d) MK, aequabitur (e) NKZ, ut ſupra, [*proindeque NF ipſi KZ parallela, eſt* (f) *parameter.*]

IV. Ducto vero ex vertice Coni A in plano trianguli per axem recta AO parallela NK; cum ſit FN ad NE, ut KD ad NK (g), ſive (h) ut DO ad OA, itemque NE ad NQ, ut BO ad OA; erit [*ex tribus rectis FN, NE, NQ, prima ad tertiam, ſeu*] FN ad NQ in ratione (i) compoſita ex [*FN ad NE, ſeu*] DO ad AO, & ex [*NE ad NQ, ſeu*] BO ad AO, videlicet ut rectangulum DOB ad quadratum AO (k): Vnde ſi fiat ut quadratum AO ad rectangulum DOB, ita latus tranſverſum QN ad NF, erit haec latus rectum, ſeu parameter.

V. Immo etiam ducta AT ex Coni vertice parallela diametro baſis DB, & conveniente cum tranſverſo latere NQ in T, erit rectangulum QTN ad quadratum AT, ut tranſverſum latus NQ ad rectum NF: quippe [*ob triangula KND, TNA ſimilia,*] cum ſit (l) NT ad TA, ut NK ad KD, ſi-

a *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
b 11. *VI. Elem.*
c *ex hypoth.*
d *cor.* 1. *prop.* 2.
e 16. *VI. Elem.*
f *per. cor.* 1. *huius prop.*
g *Coroll. praeced.*
h *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
i *ex num.* 12. *par.* 3. *V. El.*
k *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
l *prop.* 4. *VI. El.*

ve (a) ut AO ad OD; nec non QT ad TA, ut AO ad OB, [*ratio compoſita ex rationibus NT ad TA, & QT ad TA, ſeu* (b) *ratio rectanguli QTN ad TA quadratum, aequabitur rationi compoſitae ex rationibus AO ad OD, & AO ad OB, ſeu rationi, quam* (c) *habet quadratum AO ad rectangulum BOD; quocirca*] erit rectangulum QTN ad quadratum TA, ut quadratum AO ad DOB rectangulum, adeoque ut QN ad NF (d).

VI. Denique cuiuslibet ordinatae MK quadratum ad rectangulum QKN, vel quadratum HI ad QIN rectangulum erit, ut rectum latus NF ad tranverſum NQ: Nam etiam rectangulum ZKN, quod aequatur quadrato MK (e), ad QKN eſt, ut ZH (f) ad QK (ob eandem altitudinem NK), & SIN, quod aequatur quadrato HI (g), eſt ad QIN, ut IS ad QI (h): verum hae rationes ZK ad QK, aut SI ad IQ ſunt eaedem, ac (i) ratio lateris recti NF ad NQ tranſverſum; ergo quadrata ordinatarum [*MK*, *HI*] ad rectangula ex diametri partibus ſibi correſpondentibus [*QKN*, *QIN*] ſunt, ut parameter, ſeu latus rectum [*NF*] ad latus tranverſum [*NQ*].

VII. [*Hinc ſi Hyperbola MNG habeat latus rectum NF aequale tranſverſum QN; etiam ordinatarum MK, HI quadrata aequabuntur rectangulis QKN, QIN. Huiuſmodi Hyperbola* aequilatera *nuncupatur.*]

a *cor.* I. *prop.* 4. *VI. El.*
b *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
c *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
d *Coroll. praeced.*
e *cor.* I. *huius propoſit.*
f I. *VI. Elem.*
g *Coroll.* I. *huius prop.*
h I. *VI. Elem.*
i *cor.* I. *prop.* 4. *VI. El.*

PRO-

PROPOSITIO VI.

QVod ſi KN communis Sectio trianguli per axem, & plani ſecantis, per rectam MKG diametro baſis BD, vel alterius aequidiſtantis circuli diametro ordinatam, tranſeuntis, conveniat cum utroque latere infra verticem A, ad puncta N, Q: erunt huius Sectionis QHN ordinatarum MK, HI quadrata, ut rectangula partium diametri, inter utrumque terminum Q, N ab ipſis ordinatis ſecti, nempe ut QKN ad QIN; Et eiuſmodi Sectio (ſi nec ſit baſi parallela, nec ipſi ſubcontrarie poſita, adeoque circulus non fuerit) ſpeciali nomine *Ellipſis* nuncupabitur, cuius pariter latus tranſverſum erit ipſa QN. Fig. 28.

Eadem demonſtratione, qua ſuperior propoſitio, haec quoque probatur: unde non intereſt hic illam iterare, ſed huic figurae ipſa eſt a lectoribus applicanda.

COROLLARIA.

I. SI fiat NK ad KM, ut KM ad KZ, diametro QN in puncto K perpendiculariter applicatam, & iuncta QZ ſecet in F rectam NF ipſi KZ parallelam, cui etiam aequidiſtans ducatur IS, cuilibet alteri ordinatae HI correſpondens; erit NF *latus rectum*, ſeu *parameter* huius ſectionis: & quarumlibet ordinatarum quadrata MK, HI erunt reſpecti-

ve aeqalia rectangulis ZKN, SIN, quae ſunt applicata parametro NF, ſed cum defectu rectangulorum, (ducta FRY parallela NQ, ſecante ipſas KZ, IS in Y, R) ZYF, SRF ſimilium rectangulo QNF ſub tranſverſo latere QN, & ſub recto NF comprehenſo. Idque probatur; ut in Cor. 1. prop. praeced. permutato in *defectum* illo *exceſſu* rectangulorum applicatorum parametro, aequalium quadratis ordinatarum hyperbolae, a dicto exceſſu ſic nuncupatae, uti ab hoc defectu nomen Ellipſis deducitur.

II. Si pariter fiat ut NK ad KB, ita KD ad KZ, iuncta QZ ſecans NF in F determinabit parametrum. Vt in cor. 2. prop. praeced.

III. Item ſi fiat ut KN ad KD, ita NE, parallela BD, ad NF, erit haec latus rectum. Vt in cor. 3. prop. praeced.

IV. Ducta quoque AO parallela NQ, erit ut AO quadratum ad rectangulum DOB, ita latus tranſverſum QN ad rectum NF. Vt in cor. 4. prop. praeced.

V. Et ſimiliter ducta AT parallela BD, conveniente cum QN in T, erit rectangulum QTN ad AT quadratum, ut tranſverſum latus QN ad rectum NF. Vt in cor. 5. prop. praeced.

VI. Quodlibet autem quadratum ordinatae ad rectangulum ſub diametri partibus puta MK quadratum ad QKN, aut HI quadratum ad QIN eſt, ut latus rectum NF ad tranſverſum NQ. Vt in cor. 6. prop. praeced.

PRO-

PROPOSITIO VII.

SI ex eodem Cono ABD per plana invicem parallela MNG, SVR duae Parabolae, aut duae Hyperbolae, vel duae Ellipſes (aut etiam quovis numero plures), ſecentur, earum parametri, ſeu latera recta NF, VT, erunt proportionalia diſtantiis NA, VA ſuorum verticum N, V, a Coni vertice A. Fig. 29. 30. 31.

Nam eſt KN ad KD, ut EN ad parametrum NF (a): ac ſimiliter foret, ut VO ad OD, ita PV ad parametrum VT alterius Sectionis priori parallelae; Quare cum (b) ſit eadem ratio NK ad KD, & VO ad OD ob rectas NK, VO parallelas, erit quoque ratio EN ad NF eadem, quae PV ad VT (c) ac permutando, erit NF ad VT, ut EN ad PV, ſive (d) ut NA ad VA. Q. E. D.

a *cor.* 2. *pr.* 4. & *cor.* 3. *pr.* 5. & 6.
b *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
c 11. *V. Elem.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*

COROLLARIUM.

IN Hyperbolis, & Ellipſibus, quoniam pariter tranſverſa latera QN, LV [*utpote invicem parallela*] ſunt (e), ut diſtantiae a Coni vertice NA, VA, erunt etiam recta latera NF, VT (f) proportionalia tranſverſis QN, VL: & ideo hae Sectiones parallelis planis ab eodem Cono deductae *ſimiles* dicuntur. Parabolae autem quaelibet ſemper ſimiles ſunt quippe ob diametrum uni ex lateribus Coni equidiſtantem (g), ſemper planis parallelis ex eodem Cono deduci poſſunt.

e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f 11. *V. Elem.*
g *ex pr.* 4.

PRO-

PROPOSITIO. VIII.

Fig. 32. 33. 34. IN omni Sectione Conica, ſi rectum latus NF poſitum perpendiculare diametro, bifariam ſecetur in R, ducta RT, quae in Parabola aequidiſtet diametro, in reliquis autem Sectionibus bifariam ſecet in C tranſverſam diametrum QN: dico quadratum cuiuslibet ordinatae MK fore duplum quadrilateri NRTK ſibi correſpondentis, quod recta KT eidem NF parallela, cum dictis aliis lineis concludit.

Ducatur enim recta FB, in parabola quidem parallela diametro, in aliis vero Sectionibus, cum alio termino Q tranſverſi lateris, terminum F lateris recti con'ungens, unde in omnibus (a) evadet ipſi RT parallela, ob QN in C, ac NF in R ab ipſa bifariam, [*adeoque proportionaliter*] ſectas, dum utraque FB, RT in parabola aequidiſtat diametro; ac iuncta NB ab eadem RT bifariam ſecabitur in S, ut NF ab ipſa biſecatur in R. Quare triangula NSR, SBT, cum habeant ad verticem S (b) aequales angulos, & alios (c) alternos [*SNR*, *TBS*] parallelarum [*NR*, *TB*] pariter aequales, cum aequalibus lateribus NS, SB, erunt invicem aequalia (d); & communi addito quadrilineo NSTK, erit triangulum NKB aequale quadrilatero NRTK: Sed ex geneſi Sectionum patet, ordinatae MK quadratum (e) aequari rectangulo NKB, adeoque duplo trianguli NKB,

a 2. *VI. Elem.*
b 15. *I. Elem.*
c 27. *I. Elem.*
d 26. *I. Elem.*
e *cor.* 1. *pr.* 4. & *cor.* 1. *pr.* 5. & 6.

NKB ; ergo idem quadratum ordinatae duplum eſt quadrilateri NRTK. Q.E.D.

Punctum illud C, quod in hyperbolis, & Ellipſibus bifariam ſecat latus tranſverſum QN, *Centrum* harum Sectionum vocabitur. Recta vero QF, ſive FB *directrix* ; & CR, ſive RT (etiam in Parabola) *Subdirectrix* poterit appellari.

COROLLARIUM.

[*Quemadmodum ordinatae MK quadratum duplum eſt quadrilateri NRTK, ita alterius ordinatae PV quadratum duplum erit quadrilateri NRXV*] : Exceſſus [*igitur*] quadrati cuiuslibet ordinatae PV ſupra quadratum alterius ordinatae MK aequabitur duplo exceſſui quadrilateri NRXV, ſupra NRTK, ideſt duplo quadrilinei KVXT: & ille quadratorum exceſſus (ducta MG diametro parallela) eſt rectangulum PGD (a); Quare hoc rectangulum aequatur duplo KVXT. a 5. II. Elem.

PROPOSITIO IX.

DAtae cuilibet Coni Sectioni tangentem ducere ad punctum in eius perimetro datum.

Vel datum punctum eſt in Sectionis vertice N, & tunc ducta NE parallela ordinatis, erit tangens: ſi enim ex puncto N infra Sectionem caderet, ab una tantum parte diametri chordam efficeret, unde diame- Fig. 35. 36. 37.

ter biſariam non ſecaret omnes parallelas ordinatis intra Sectionem poſitas; quod eſt contra primam ex ſecundis definitionibus; tangit ergo haec recta in dato puncto Sectionem.

Vel datum punctum extra verticem in perimetro Sectionis eſt, puta in M; & tunc ducta ſubdirectrice RT, ordinetur MK ad diametrum Sectionis, & KT parallela ſemiparametro NR, uſque ad ſubdirectricem pertingens in T, atque ipſis KT, MK tertia proportionalis KG in diametro ponatur ſupra ordinatam; iuncta GM tanget Sectionem. Ducatur enim recta GT, & ordinetur ad diametrum alia quaevis HL, occurrens ipſi GM in P; nec non ducatur LV parallela KT, ſubdirectricem ſecans in V, & rectam GT in D. Quoniam igitur ſunt tres proportionales KT, KM, & KG, rectangulum GKT aequatur (a) quadrato MK, adeoque eſt duplum quadrilateri NRTK (b): ſed idem rectangulum eſt quoque duplum (c) trianguli GKT; ergo hoc triangulum dicto quadrilatero aequabitur. Et quia ut TK ad KG, ita (d) DL ad LG, atque ut GK ad KM, ita (e) GL ad LP, [*erit ex aequo TK ad KM, ut DL ad LP: ſed TK eſt ad KM, (f) ut KM ad KG, ut LP ad LG; ergo etiam eſt DL ad LP, ut LP ad LG; unde*] quemadmodum proportionales ſunt TK, KM, KG, ita etiam DL, LP, LG erunt continue proportionales; unde quadratum LP aequabitur (g) rectangulo GLD, ſeu duplum (h) erit trianguli GLD, uti

a 17. *VI. Elem.*
b *pr. preced.*
c *ex. pr.* 34. *I. El.*
d *cor. I. prop.* 4. *VI. El.*
e *per idem cor.*
f *per conſtru.*
g 17. *VI. Elem.*
h 34. *I. Elem.*

uti quadratum ordinatae HL duplum eſt quadrilateri (a) NLVR. Sed triangulum GLD ſemper maius erit ipſo quadrilatero NLVR; quia ſi LH eſt ordinata infra MK, triangulo GKT additur trapezium KLDT maius quadrilatero KLVT, quod adiungitur NKTR; ſi vero h l ſit ſupra MK, triangulo GKT auſertur trapezium l K T d minus quadrilatero l K T u, quod auſertur ab ipſo NKTR; unde ſemper maius reſultat triangulum GLD quadrilineo NLVR, aut triangulum Gld quadrangulo NluR. Itaque quadratum PL maius eſt quadrato HL, & quadratum p l maius quadrato h l; unde quaelibet puncta P, aut p, praeter punctum M, rectae GM ſunt extra Sectionem; & ideo GM eſt eius tangens. Q. E. D.

a *ex pr.* 8.

Illa diametri portio KG, quae inter ordinatam, & concurſum tangentis intercipitur, *ſubtangens* vocatur.

COROLLARIA.

I. HInc patet, tangentem harum Sectionum in unico puncto cum earum curva convenire.

II. Producta KT ad directricem FB in B, quoniam ex natura harum Sectionum, rectangulum NKB aequatur quadrato ordinatae MK (b), & hoc quadratum (c) aequatur rectangulo GKT, erit NKB aequale GKT; & ideo (d) ſubtangens GK ad abſciſſam a vertice NK erit, ut KB ad KT, [*& invertendo KT ad KB, ut NK ad GK:*] unde tangens dati puncti M etiam determinabitur, ſi

b *cor.* 1. *pr.* 4. 5. *&* 6.

c *ex demonſt. huius pr.*

d 16. *VI. Elem.*

fiat

fiat, ut KT ad KB, ita KN ad KG, & ad
a Coroll. praeced. M iuncta GM erit tangens.

III. [*Quoniam KB eſt ad KT, ut* (a) *GK ad KN*] per converſionem rationis (b) erit ut KB ad BT, ſcilicet ad dimidium parametri (nam BT aequatur RF (c), ſive (d) NR), ita ſubtangens KG ad GN, tangente, & vertice curvae interceptam.

b cor. 1. pr. 18. V. El.
c 34. I. Elem.
d ex hypoth.

IV. Item [*cum ſit KB ad TB*, (e) *ut GK ad GN*,] dividendo, KT ad TB aequalem ſemiparametro, erit, ut KN ad NG.

e cor. 3.

V. Item ſi iungatur BR, quae occurrat diametro in G, erit (f) KG ſubtangens, cum ſit KB ad [*dimidium Parametri*] NR, ut KG ad GN.

f cor. 3. huius pr.

VI. Hinc in Parabola ſemper ſubtangens KG dupla eſt KN abſciſſae per ordinatam a vertice, uti etiam dupla reliquae NG, inter verticem, & tangentis occurſum cum diametro, quia KB ſemper aequatur parametro (g) NF, cum ſit directrix FB parallela diametro; adeoque ſemper KB eſt dupla ſemiparametri NR, aut (h) KT, unde [*cum ſit KB ad NR, ut* (i) *GK ad GN*,] etiam GK eſt dupla GN, aut NK.

Fig. 35.
g pr. 34. I. El.
h per eamdem.
i cor. I. prop. 4. VI. El.

VII. At in Hyperbola, & Ellipſi [*ob parallelas CT, QB*,] eſt QK ad CK, ut (k) BK ad KT, adeoque etiam, ut (l) GK ad KN, [*& invertendo, CK ad QK, ut KN ad GK*]. Vnde ſi fiat, ut diſtantia ordinatae a centro CK ad eius diſtantiam a remotiore termino tranſverſi QK, ita diſtantia a ver-

Fig. 36. 37.
k cor. I. prop. 4. VI. El.
l ex Coroll. 2.

vertice proximiori KN ad aliam GK, erit haec ſubtangens quaeſita.

VIII. Vnde rectangulum QKN aequabitur rectangulo CKG (a), propter QK ad CK, ut (b) GK ad KN.

IX. Erit quoque per converſionem rationis (c), QK ad CQ, ſeu ad CN dimidium tranſverſi lateris, ut ſubtangens GK ad GN interceptam vertice, & tangente.

X. Et quia, ob parallelas QB, CR, eſt QG ad GC, ut (d) BG ad GR, quae ſunt ut (e) GK ad GN (ob parallelas KB, NR,) ideo erit QG ad GC, ut QK ad CQ, vel CN, cum iſtae (f) ſint in eadem ratione ipſius GK ad GN.

XI. Et dividendo erit QC ad CG, ut CK ad CQ, vel CN, [*& invertendo CG ad QC, ut QC ad CK;*] unde erunt continue proportionales CK, CQ, CG, ſive, CK, CN, CG; & rectangulum KCG aequabitur (g) quadrato ſemitransverſi lateris CN, vel CQ: unde tangens invenietur, ſumpta ipſis CK, CN tertia proportionali CG, & iungendo ad punctum M rectam GM.

XII. Quoniam QK ad CQ eſt, ut GK ad GN (h), & CQ ad GQ, ut (i) KN ad GK, (cum utraque (k) harum rationum aequetur [*rationi*] RB ad BG,) ergo ex aequo perturbate QK ad GQ eſt, ut KN ad GN (l), & permutando, QK ad KN, ut GQ ad GN: unde eſt armonice ſecta diameter (m) hyperbolae, & Ellipſis per terminos tranſverſi lateris, concurſum ordinatae, & tangentis; adeoque tangens determinatur, faciendo huiu-

a 16 *IV. Elem.*
b *ex corol.* 7.
c *cor.* 1. *pr.* 18. *VI. El.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e *per idem Coroll.*
f *ex Coroll.* 9.
g 17. *VI. Elem.*
h *ex Coroll.* 9.
i 11. *V. Elem.*
k *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
l 23. *V. Elem.*
m *per* 5. *ex ſec. definit.*

iuſmodi Sectionem harmonicam, nempe ut QK ad KN, ita punctum G ſtatuendo, ut ſit GQ ad GN in eadem ratione.

XIII. Hinc alia eruitur generalis conſtitutio pro tangente cuiuſvis ſectionis Conicae ad datum punctum M. Ducta enim ordinata MK, & ex vertice N huic parallela NI, quae erit tangens verticalis (a); ſi ex M ducatur in Parabola MI parallela diametro, in Ellipſi vero, & Hyperbola iungatur ad alium tranſverſi lateris terminum Q recta MQ, ſecans verticalem illam tangentem in I, ſi ubique ſecetur bifariam NI in E, iuncta ME erit tangens. Nam ſi haec ad diametrum producatur in G, [*erit MK ad EN, ut* (b) *KG ad GN, adeoque*] patet fore in parabola GK duplam GN, ut MK (c) aequalis NI, eſt dupla EN, & ideo (d) GM eſt tangens. In hyperbola vero, & ellipſi ducta etiam QO parallela ipſi NE quae a recta GM producta ſecabitur in O, erit QO ad NE, ut (e) QG ad GN; ſed in eadem ratione [*QO ad NE*] eſt etiam QO ad IE (utpote aequalem ipſi NE,) vel (f) QM ad MI, vel (g) QK ad KN; ergo QG ad GN eſt, ut QK ad KN: unde harmonice ſecta eſt diameter in G (h), atque in terminis tranſverſi lateris, & occurſu ordinatae; ergo MG eſt tangens (i).

XIV. Quaelibet Hyperbolae tangens MG ſemper infra centrum C, ſupra verticem N cum diametro concurrit: nam [*QG* (k) *eſt ad GN, ut QK ad KN: ſed*] QK maior eſt KN, ergo & QG eſt maior GN.

eſt

a *per hanc pr.*
b *cor.* I. *prop.* 4. *IV. El.*
c 34. I. *Elem.*
d *cor.* 6. *huius pr.*
e *pr.* 4. *VI. El.*
f *cor.* I. *prop.* 4. *VI. El.*
g *per idem Coroll.*
h *per* 5. *ex ſec. def.*
i *cor.* 12. *huius pr.*
k *cor.* 13. *huius pr.*

XV. Ducta ex centro C ellipſis, & hyperbolae, recta CX parallela NE, conveniente cum MQ in X, patet [*eſſe CQ ad QN, ut* (a) *CX ad NI, proindeque*] fore CX medietatem NI, ut CQ medietas eſt QN, adeoque aequari NE, vel IE, ac iunctis CE, XE, fieri parallelogramma (b) CXEN, CXIE, QXEC; Quare ad ducendam tangentem ex dato puncto M, ſufficiet iungere ad remotiorem diametri terminum Q rectam MQ, & ex centro ducta CX parallela ordinatis, factoque uno ex dictis parallelogrammis, iuncta ex M ad angulum E, (ſive ducta XE dumtaxat, parallela, & aequali ſemidiametro CN, iunctaque ex M ad punctum E), ipſa recta ME tangens erit (c).

a *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.* b 33. *I. Elem.*

c *ex Coroll.* 13.

XVI. Denique, ſi diameter NK in qualibet Sectione ſit eius axis, poſita in ipſo KS aequali KT, ad partem ſubtangenti oppoſitam, iuncta SM erit perpendicularis curvae. Nam cum tangente GM rectum angulum efficiet SMG; nam cum ſit TK, ſive KS illi aequalis, ad KM, ut KM ad KG (d) quadratum MK aequatur (e) rectangulo SKG, [*& duplum quadrati MK aequatur duplo rectanguli SKG, additiſque communiter quadratis SK, KG, erit duplum quadrati MK, cum quadratis SK, KG, aequale quadratis SK, KG, cum duplo rectanguli SKG, ſeu aequale* (f) *quadrato SG,*] & ideo cum ſit MK perpendicularis axi GS, [*proindeque duplum quadrati MK cum quadratis SK, KG aequale ſit quadratis SM, MG* (g); *quadrata*

Fig. 38. 39. 40.

d *ex demon. huius prop.* e 17. *VI. Elem.*

f 4. *II. Elem.*

g 47. *I. Elem.*

ta SM, *MG aequabuntur quadrato SG*, *adeoque*] erit SMG triangulum rectangulum (a), cuius normalis MK eſt media [*proportionalis*] inter ſegmenta (b) baſis SK, KG. Dicetur autem ipſa KS *Subnormalis*, quae in Parabola ſemper erit aequalis ſemiparametro NR, cui (c) aequatur KT: in hyperbola vero, & Ellipsi erit ad ſemiparametrum, ut diſtantia ordinatae a centro CK ad ſemiaxem tranſverſum CN, ita (d) enim eſt & KT ad NR, ſive eadem ſubnormalis KS aeqalis KT eſt ad diſtantiam ordinatae a centro CK, ut (e) rectum latus NF ad tranſverſum QN, ob triangulorum TKC, FNQ ſimilitudinem.

a 48. *I. Elem.*
b 8. *VI. Elem.*
c 34. *I. Elem.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e 4. *VI. Elem.*

PROPOSITIO X.

Fig. 41.

IN Parabola quaelibet recta MD, parallela eius diametro NK, eſt pariter & ipſa diameter, bifariam ſecans omnes illi ordinatas HF, NZ, parallelas tangenti MG; & quadrata pariter eius ordinatarum HD, NX ſunt, ut abſciſſae MD, MX a vertice M talis diametri.

Ex vertice N diametri NK, unde genita eſt parabola, ducta tangente NE, quae occurrat ipſi MD in I, ducatur quoque NXZ parallela tangenti MG, quae ipſi MD occurret in X, & curvae in alio puncto Z: ducantur quoque ordinatae ad diametrum NK rectae MK, & ZT, ſecans MD in V. Erit quadratum MK ad quadratum ZT, ut NK ad TN, ex natura parabolae (f), ſive ut pa-

f *ex pr.* 4.

parallelogrammum NKMI ad aliud aeque altum NTVI (a): at ſimilia triangula GKM, NTZ ſunt pariter, ut quadrata homologorum laterum MK, ZT (b); ergo haec triangula ſunt ut dicta parallelogramma; ſed triangulum GKM aequatur NKMI, ob eius baſim GK duplam basis huius NK (c); & parem utriuſque altitudinem; ergo etiam triangulum NTZ (d) aequabitur NTVI: & ablato communi NXVT erit triangulum XVZ aequale ſimili triangulo XIN; quare (e) & horum latera homologa XZ, XN erunt aequalia: igitur recta MD bifariam dividit in X ipſam NZ tangenti MG parallelam. Similiter ducta qualibet alia parallela HDF ſupra NZ, quae ſecet NK in P, & NI in Æ, & ordinatis ad priorem diametrum NK, HL, FB, ſecantibus ipſam MD in R, S; cum ſit triangulum PLH ad GKM ſibi ſimile, ut (f) LH quadratum ad quadratum KM, ideſt, ut (g) NL ad NK, ſive (h) ut NLRI ad NKMI; quemadmodum GKM aequatur NKMI, etiam PLH erit (i) aequale NLRI; & aliud ſimile triangulum PFB aequabitur NBSI, cum ſit ad GKM pariter, ut (k) quadratum FB ad quadratum MK, nempe, ut (l) BN ad NK, ſive (m) ut NBSI ad NKMI: quare differentia triangulorum PFB, PLH, ideſt quadrilineum LHrB, aequabitur differentiae parallelogrammorum ipſis triangulis aequalium NBSI, & NLRI, ideſt parallelogrammo LBSR; & ablato communi ſpatio LBSDH, remanebunt triangula DSF, DHR aequalia; unde cum ſimilia

a 1. *VI. El.*, & *cor. 1. pr. 20. VI. Elem.*
b 19. *VI. Elem.*
c *cor. 6. pr. p.* 9.
d 14. *VI. Elem.*
e *ex* 19. *VI. El.*
f 19. *VI. Elem.*
g *ex. pr.* 4.
h 1. *VI. Elem.*
i 14. *V. Elem.*
k 19. *VI. Elem.*
l *ex pr.* 4.
m 1. *VI. Elem.*

a *ex pr. 19. VI. Elem.* ſint, erunt (a) homologa latera DF, DH pariter aequalia. Similiter, ducta infra NZ recta h f parallela tangenti MG, quae ſecet NK in p, NI in æ, atque ordinatis h L, f b ad diametrum NK, ſecantibus ipſam MD in R, ſ, [*aequabuntur ſimilia triangula* b *ex pr. 19. VI. Elem.* *p L h, PLH, ob aequalitatem homologorum* (b) *laterum h L, HL; unde quemadmodum PLH oſtenſum eſt aequale parallelogrammo NLRI, etiam*] oſtendetur triangulum p L h aequale NLRI, unde utrinque addito L b ſ R, erit h p b ſ R aequale ipſi N b ſ I parallelogrammo, quod erit aequale triangulo p b f ob eamdem rationem in ſimilibus litteris ſupra adductam, [*qua nempe triangulum PBF oſtenſum fuit aequale NBSI*:] quare cum proveniat h p b ſ R aequale p b f, ablato communi p b ſ d, reſultabit triangulum h d R ſimile, & aequale f d ſ; ideoque & homologa latera h d, d f (c) c *ex pr. 19. VI. Elem.* aequalia erunt. Igitur recta MD ſecat bifariam quaslibet parallelas tangenti GM; unde reſpectu harum ordinatarum eſt quoque MD diameter.

d *cor. 6. prop. 9.* e *34. I. Elem.* f *ex pr. 19. VI. Elem.* Quia vero propter GN aequalem (d) NK, aequalem (e) IM, triangula ſimilia GEN, IEM (f) aequantur, addito utrinque NEMX, parallelogrammum GNXM aequatur triangulo INX: pariterque iisdem triangulis GEN, IEM, addito NEMSB, quadrilineum GMSB aequatur parallelogrammo INBS, cui oſtenſum eſt g *ex demonſ. hujus pr.* aequale (g) triangulum PBF; ergo ex hoc triangulo, & ex GMSB, ablato trapezio PDSB, erit triangulum DSF aequale parallelogrammo GPDM, quare triangulum INX,

ſive

ſive illi [*ſimile* , *&*] aequale XUZ (a), ad *a 19. VI.*
triangulum DSF eidem ſimile , adeoque (b) *Elem.*
& quadratum XZ ad quadratum DF , ſive *b per*
quadratum NX ad quadratum HD erit , ut *eamdem.*
parallelogrammum GNXM ad GPDM, ſive (c) *c 1. VI.*
ut XM ad DM. Q. E. D. *Elem.*

COROLLARIA.

I. Hinc quaecumque reſpectu diametri primigeniae KN , eiu que ordinatarum
dicta (d) ſunt , ad quamlibet aliam diame- *d cor. 6.*
trum MD referri poſſunt circa tangentem , *prop. 9.*
velut NI , cuius ſubtanges XI pariter dupla *& cor. 1.*
erit abſciſſae MX ; & circa parametrum , ſeu *pr. 4.*
latus rectum huic alteri diametro MD determinandum , quod erit tertia proportionalis poſt quamlibet abſciſſam MD , & eius ordinatam DF , ut quadratum cuiuslibet ordina-
tae (e) aequetur rectangulo ſuae abſciſſae *e 17. VI.*
in idem latus rectum huic diametro perti- *Elem.*
nens.

II. Notetur autem , quaevis triangula ſuper ordinatis ſuae diametro adiacentia , cum ſubtenſo latere parallelo tangenti , ve-
lut PLH , PBF , NTZ , aequari (f) paral- *f ex de-*
lelogrammis ſibi correſpondentibus NLRI , *mon. hu-*
NBSI , NTVI , &c. ; uti etiam IXN aequa- *ius pro.*
tur MXNG , RDH aequatur MDPG , [*et ob triangulum p b f aequale b N I ſ , ſeu bGMſ , ablato communi trapezio b p d ſ , triangulum reſiduum*] d f ſ aequatur M d p G , & ſic de aliis.

III. Item notetur , triangulum NEG

oſtenſum aequale IEM: & ob triangulum DHR aequale MDPG, ablato communi MDHO, triangulum ORM aequatur OHPG; unde idem triangulum ORM, cum ſimili PLH aequatur triangulo GLO: pariterque ob hL aequalem HL, quia (a) triangulum hpL aequatur PLH, erit ORM cum pLh aequale GLO: [*ſed ob proportionem triangulorum ſimilium cum quadratis homologorum laterum* (b), *triangulum ORM cum ſimili PLH, vel triangulum ORM cum ſimili pLh eſt ad triangulum GLO, ut ſumma quadratorum OR, LH, vel OR, hL ad quadratum OL*;] Vnde & quadrata OR, HL, aut OR, hL aequantur quadrato OL; aut ſumptis aliis lateribus homologis, quadrata MR, ſeu (c) KL, & LP, aut Lp quadrato LQ aequantur.

a *ex demonſtr.*

b *ex 19. VI. El. & corol. 1. pr. 20. VI. El.*

c 34. *I. Elem.*

IV. Similiter ob triangulum XVZ aequale MXNG extenſa tangente GM, ut ſecet ordinatas TZ in Y, atque BF in A, iuncto MXZY, evadit triangulum MVY aequale ZNGY: Sicuti ob triangulum DFS aequale MDPG, addito utrinque MDFA, fit triangulum MSA aequale FPGA: & ſimiliter [*cum ſit triangulum fdf* (d) *aequale MdpG, utrinque addito Mdfa*] oſtendetur triangulum Mſa aequale fpGa.

d *ex Coroll. 2.*

V. Hinc triangulo MVY, & huic aequali trapezio ZNGY, addito triangulo ſimili NTZ, erunt triangula MVY, NTZ aequalia ſimili triangulo GTY; adeoque [*quemadmodum oſtendimus* (e) *quadrata OR, LH aequari quadrato LO*,] etiam quadrata VY,

e *cor. 3.*

& TZ

& TZ aequantur quadrato TY : Sicuti addito PrB triangulo ad triangulum MSA, vel ad huic aequale trapezium rPGA; erunt duo ſimilia triangula PrB, MSA aequalia ſimili triangulo GBA; unde & quadrata Br, SA aequantur quadrato BA: & ſimiliter aliis homologis lateribus acceptis, erunt quadrata MV, ſeu KT, & NT aequalia quadrato GT; nec non quadrata PB, & MS, ſeu KB aequalia quadrato GB; & ſic de aliis.

VI. Rurſus, quoniam triangulum PLH aequatur NLRI, ablato communi NLHÆ, fit triangulum PNÆ aequale ÆHRI, additoque ſimili triangulo HRD, erunt triangula PNÆ, HRD aequalia ÆDI triangulo ſimili; unde quadrata homologorum laterum NÆ, & HR aequantur quadrato ÆI: item quadrata PÆ, HD aequalia erunt quadrato ÆD; quod cum aequale ſit (a) rectangulo FÆH, cum quadrato HD, [*quadrata PÆ, HD aequalia erunt rectangulo FÆH cum quadrato HD, communiterque ablato HD quadrato*,] erit PÆ quadratum aequale FÆH rectangulo. Et ſimiliter, ob triangulum hpL aequale NLRI, & addito utrinque NLhæ, triangulum pNæ aequale erit IRhæ; unde adiecto triangulo hRd, erunt duo triangula pNæ, hRd aequalia ſimili triangulo æId; adeoque quadrata homologorum laterum dh, pæ erunt aequalia quadrato æd, ſeu rectangulo fæh, cum quadrato dh (b); unde quadratum pæ erit rectangulo fæh aequale; & æp erit media (c) proportionalis inter fæ, & æh, ſicut PÆ (d) media eſt proportionalis inter FÆ, & ÆH.

a 6. II. *Elem.*

b 6. II. *Elem.*

c 17. *VI. Elem.*

d *ex demonſt.*, & 17. *VI. Elem.*

a ex Co- VII. Eadem ratione, quoniam quadrata
roll. 3. OR, LH aequantur quadrato LO (a), ſeu
b 6. II. rectangulo hOH (b) cum quadrato LH, [*a-*
Elem. *blato communiter quadrato LH*,] eſt quadratum OR aequale rectangulo LOH, & ideo eſt OR media proportionalis inter hO,
c 17. VI. & OH (c): ſimiliterque, producta ordinata
Elem. FB ad aliam curvae partem in Φ, cum ſint
d cor. 5. quadrata SA, & FB aequalia quadrato BA (d),
huius pr. hoc eſt rectangulo ΦAF cum BF quadrato (e),
e 6. II. erit rectangulum ΦAF aequale quadrato SA,
Elem. ipſaque SA media proportionalis inter AΦ,
f 17. VI. & AF (f).
Elem. VIII. Quare ſi duae tangentes NE, ME conveniunt in E, & uni earum NE parallela ΦA ſecet aliam tangentem in A, erit rectangulum ex tota ſecante ΦA in partem externam AF, ad quadratum AM portionis interceptae ex tangente AM inter contactum, & ſecantem, ut quadratum parallelae tangentis NE ad quadratum reliquae tangentis EM: quippe [*ob ſimilia triangula GNE, MSA, eſt NE ad EG, ut SA ad AM, ſeu NE quadratum eſt ad EG quadratum, ut qua-*
g 22. VI. *dratum (g) SA ad quadratum AM; unde*]
Elem. NE quadratum ad quadratum EM (quod aequatur EG quadrato) eſt, ut quadratum SA,
h ex Co- (ſeu rectangulum ΦAF illi (h) aequale) ad
roll. 7. quadratum AM. Sic etiam ſecantis ÆHF parallelae tangenti ME rectangulum FÆH, eſt ad quadratum ÆN, ut quadratum PÆ illi
i ex Co- rectangulo aequale (i) ad quadratum ÆN,
roll. 6. ſive ut GE, vel ei aequalis EM quadratum, ad quadratum EN.

PRO-

PROPOSITIO XI.

IN Parabola AND, cuius baſis AD, diameter NB latus rectum NF, quaelibet rectae diametro parallelae ME, HG ſunt, ut rectangula partium baſis AED, AGD; & etiam baſi producta, ſi extra parabolam agantur parallelae diametro e m, g h, erunt hae quoque, ut rectangula A e D, A g D. Fig. 42.

Nam ut quadratum BD aequatur rectangulo BNF, ita quadratum alterius ordinatae HP, vel h p aequatur rectangulo parametri NF in abſciſſam NP, ſeu Np (a); ergo differentia quadratorum BD, & PH, ſeu (b) BG illi aequalis, quae eſt (c) rectangulum AGD, aequatur rectangulo eiusdem NF in differentiam abſciſſarum NB, NP, quae eſt PB, aequalis (d) HG: & ſimiliter differentia quadratorum BD, p h, ſive illi (e) aequalis Bg, quae eſt rectangulum AgD (f), aequabitur rectangulo eiusdem NF in Bp, ſeu (g) g h, quae eſt differentia BN ab Np: Similiter oſtendetur, rectangulum AED aequari NF in ME; & rectangulum A e D aequari NF in m e; ergo hae lineae parallelae diametro, ME, HG, ſunt (h) ut rectangula AED, AGD, quia illae lineae in eamdem parametrum NF ductae, illis rectangulis ſunt aequales; ac ſimiliter [*quia e m in NF eſt ad g h in NF, ut Aed ad AgD*,] e m, g h (i) erunt, ut rectangula ipſis correſpondentia AeD, AgD. Q. E. D.

a *cor.* 1. *prop.* 4.
b 34. *I. Elem.*
c *pr.* 5. *II. El.*
d 34. *I. Elem.*
e 34. *I. Elem.*
f 6. *II. Elem.*
g 34. *I. Elem.*
h 1. *VI. Elem.*
i 1. *VI. Elem.*

CO-

COROLLARIUM.

PRoducta HP ad alteram diametri partem in L, quae ſecat ME in I, rectangulum quoque AED ad LIH erit, ut recta ME ad MI; quippe eodem modo, [*quo*] NF in ME dat rectangulum (a) aequale AED, & eadem NF in MI dabit rectangulum aequale LIH, [*quare rectangulum AED eſt ad rectangulum LIH, ut rectangulum ex ME in NF ad rectangulum ex MI in eamdem NF, ſeu ut* (b) *ME ad MI*]: Et ſimiliter producta h p in l, ſecante e m in i, rectangulum AeD aequale NF in e m, ad rectangulum l i h, quod pariter aequabitur rectangulo NF in m i, erit ut (c) e m ad m i.

a *ex hac prop.*

b 1. *VI. Elem.*

c 1. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XII.

Fig. 43. 44.

IN Ellipſi, & oppoſitis hyperbolicis Sectionibus, quaelibet recta MC per centrum C extenſa, ad alteram partem occurrit Sectioni in S; atque in centro bifariam dividitur; & ex eius terminis M, S curvam tangentes MG, SP ſunt parallelae, & aequales.

Ordinata MK ad priorem diametrum NQ, ſumptaque CF aequali CK, ordinetur ad alteram eius diametri partem FS. Iuncta SC; quoniam differentia quadratorum NC, CK, ideſt (d) rectangulum NKQ aequabitur (e) differentiae aliorum quadratorum CQ, CF illis reſpective aequalium, ideſt rectangulo NFQ

d 5. & 6. *II. El.*

e *per conſtruct.*

NFQ (a); ipſarumque ordinatarum MK, SF quadrata ſunt dictis rectangulis proportionalia (b); ergo haec quadrata pariter aequalia erunt. Vnde quia MK aequatur FS, & CK aequatur CF, & anguli alterni parallelarum MKC, SFC ſunt aequales (c), erit quoque CM baſis trianguli CKM aequalis CS baſi trianguli CFS (d), & angulus MCK erit aequalis SCF; unde ſicut ille cum angulo MCF duos rectos complet (e), ita hic cum eodem idem efficit, adeoque CS eſt indirectum ipſi MC (f) ob angulos SCF, MCF binis rectis aequales. Igitur ipſa MC producta incidit alteri parti ſectionis in S, & ipſa MCS bifariam diviſa eſt in centro C. Quoniam vero ductis tangentibus MG, SP, rectangulum GCK aequatur quadrato ſemidiametri CN (g); & ſimiliter rectangulum PCF aequatur quadrato CQ; ſicut CN aequatur CQ, [*& quadratum CN aequale eſt quadrato CQ,*] ita rectangulum GCK aequabitur PCF: eſtque GK (h) aequalis CF; ergo etiam CG aequatur CP; & propter CM (i) aequalem CS, & angulos aequales (k) MCG, SCP, erunt (l) horum triangulorum baſes MG, SP aequales, atque etiam (m) parallelae propter alternos angulos MGC, SPC [*lateribus aequalibus MC, CS oppoſitos*], pariter aequales. Q. E. D.

a 5. & 6. II. El.
b *prop.* 5. & 6.
c 27. I. *Elem.*
d 4. I. *Elem.*
e 13. I. *Elem.*
f 14. I. *Elem.*
g *cor.* 11. *prop.* 9.
h *ex conſtruct.*
i *ex demonſtr.*
k 15. I. *Elem.*
l 4. I. *Elem.*
m 28. I. *Elem.*

COROLLARIA.

I. PRoducta [*ordinata*] SF ad alteram ſectionis partem in E, erit FE aequalis SF, adeoque (n) & aequalis KM ſibi parallelae-

n 34. I. *Elem.*

a 33. I. Elem. lelae; unde iuncta ME parallela (a) erit, & aequalis ipſi KF.

II. Et ducta per centrum C ordinatis MK, EF parallela CH, bifariam ſecabit ipſam EM in B, & ſic omnes alias huic parallelas, iungentes terminos aequalium ordinatarum ad diametrum NQ. Nam [*ob parallelogramma CBMK, CBEF,*] evadet
b 34. I. Elem. BM (b) aequalis CK, & BE aequalis CF, cum ſint latera oppoſita parallelogrammorum, & [*ideo cum*] poſita iam fuerit CF aequalis CK, [*erit etiam BE aequalis BM*]. Unde ipſa quoque CH erit diameter, cui ME, TL ordinari poſſunt parallelae priori diametro, & bifariam in B, R ab ipſa HC dividentur.

Dicitur autem haec alia diameter *ſecundaria*, & priori *coniugata*. In Ellipſi quidem ab ipſo eius perimetro determinata ad puncta H, I, exiſtente CI aequali CH, cum & ipſa ordinetur diametro NQ, adeoque ab
c cor. 6. prop. 6. ipſa bifariam ſecetur in C. Et quia (c) quadratum ordinatae HC ad rectangulum partium diametri QCN, adeoque ad quadratum CN eſt, ut latus rectum NV ad tranſverſum NQ, etiam quadruplicando [*primae rationis*] terminos, quadratum HI ad NQ quadratum e-
d 1. VI. Elem. rit, ut NV ad NQ [*ſeu ut rectangulum* (d) *QNV ad idem quadratum NQ; quare* (e)
e 9. V. Elem. *HI quadratum aequale eſt rectangulo QNV,*] & ideo HI ſecundaria diameter coniugata,
f 17. VI. Elem. eſt media (f) proportionalis inter parametrum NV, & primariam diametrum tranſverſam NQ. In Hyperbola vero determi-

nan-

nanda pariter eſt media quaedam proportionalis HI inter latus rectum NV; & tranſverſum NQ, atque ita diſponenda per centrum C aequidiſtans ordinatis diametri NQ, ut in ipſo puncto C bifariam partita maneat: & haec erit ſecundaria diameter priori NQ coniugata, [*atque idcirco duae Hyperbolae Ii, HAb diametro HI tamquam tranſverſa deſcriptae*, coniugatae *prioribus appellantur. Et viciſſim ſi QN ſit media proportionalis inter latus rectum HX, & tranſverſum HI Hyperbolarum Ii, HAb, atque ita per centrum C diſponatur, ut ibi bifariam partita ſit, & aequidiſtet ordinatis diametri HI, erit QN ſecundaria diameter priori HI coniugata, Hyperbolaeque NM, QS diametro tranſverſa QN deſcriptae, erunt prioribus coniugatae.*]

PROPOSITIO XIII.

IN Ellipsi etiam ordinatarum ad ſecundariam diametrum HI quadrata BM, RT ſunt ut rectangula partium eiusdem diametri HBI, HRI, ideſt ut differentia quadrati HC a quadrato BC (a), ad differentiam eiuſdem quadrati HC ab RC quadrato. At in hyperbola quadrata BM, RT ordinatarum ad ſecundariam diametrum HI ſunt, ut ſumma quadrati HC, & quadrati BC ad ſummam eiuſdem quadrati HC, & quadrati RC. Fig. 43. 44. a 5. II. Elem.

Primum patet, quia ordinatis MK, TZ ad priorem diametrum NQ, cum ſit re-

rectangulum NCQ, ſeu quadratum CN, ad
a *prop. 6.* rectangulum QKN, ut (a) quadratum CH
b 34. *I.* ad quadratum KM, ſeu (b) CB; permu-
Elem. tando, totum quadratum CN ad totum qua-
dratum CH eſt, ut rectangulum QKN, ex
primo [*toto*] ablatum, ad quadratum CB,
ex ſecundo ablatum; quare & reliquum qua-
c 5. *II.* dratum CK, ſeu BM, [*quod cum ablato* (c)
Elem. *rectangulo QKN efficit totum quadratum CN*]
ad reliquum rectangulum HBI, [*quod cum*
d 5. *II.* *ablato CB quadrato aequat* (d) *totum qua-*
Elem. *dratum CH*;] eſt, ut totum quadratum
e 19. *V.* CN ad totum quadratum CH (e). Eo-
Elem. dem modo pariter oſtendetur, eſſe qua-
dratum RT ad rectangulum HRI in eadem
ratione quadrati CN ad CH quadratum;
ergo [*quadratum BM eſt ad rectangulum*
HBI, ut quadratum RT ad rectangulum
HRI, & permutando] quadrata ipſa BM,
& RT ſunt, ut rectangula partium ſecun-
dariae diametri HBI, & HRI, quae ſunt
f 5. *II.* differentiae (f) quadratorum BC, RC ab eo-
Elem. dem CH quadrato.

g *ex pr.* Secundum autem oſtenditur, quia in hy-
5. perbola, cum ſit (g) rectangulum QKN ad
h 1. *VI.* quadratum MK, ſeu BC, ut tranſverſum
Elem. latus QN ad rectum NV, ſive [*ut qua-*
i 17. *VI.* *dratum QN ad rectangulum* (h) *QNV, vel*,]
Elem. ut quadratum QN ad quadratum (i) HI,
k *poſt co-* quae media (k) proportionalis eſt inter NQ,
rol. 2. pr. & NV; ſeu ſumptis ſubquadruplis, ut
12. & 17. quadratum CN ad CH quadratum; etiam
VI. El. ſumma (l) antecedentium ad ſummam conſe-
l 12. *V.* quentium; nempe QKN cum CN quadrato,
Elem. quod

quod eſt CK,] ſeu BM quadratum (a), ad ſummam conſequentium, ideſt ad quadratum BC cum CH quadrato, in eadem ratione erit unius antecedentis ad ſuum conſequens, nempe ut CN quadratum ad CH quadratum: & quia eodem modo, RT quadratum ad ſummam quadratorum RC, & CH in eadem ratione quadrati CN ad quadratum CH eſſe, probabitur; igitur [*BM quadratum eſt ad quadratum BC cum CH quadrato, ut quadratum RT ad quadratum RC cum CH quadrato, & permutando,*] quadrata BM, RT ſunt, ut ſumma quadratorum BC, CH, ad ſummam quadratorum RC, & CH. Q. E. D. a *6. II. Elem.*

COROLLARIA.

I. PAtet in Ellipſi, quadratum cuiuslibet ordinatae BM ad rectangulum partium ſuae diametri ſecundariae HBI eſſe, ut tranſverſum [*latus*] QN ad rectum NV, cum ſit, ut quadratum CN ad quadratum CH (b), vel QN quadratum ad HI quadratum, quae ſunt, [*ut quadratum QN ad rectangulum QNV* (c) *vel*] in eadem ratione [*QN ad* (d) *NV*]. Fig. 43. b *ex hac prop.* c *poſt. co. 2. pr. 12.* d *ex 1. VI. El.*

II. Vnde poſita HX quarta proportionali ad NV, HI, QN, erit ipſa HX latus rectum coniugatae diametri HI; nam [*quia HX ad QN eſt, ut* (e) *HI ad HV*], permutando, HX ad HI erit, ut QN ad NV, adeoque ordinatae BM quadratum ad rectangulum HBI, & quadratum alterius ordinatae TR ad rectangulum HRI eſt, ut (f) HX ad e *ex conſtruct.* f *ex Coroll. 1.*

ad diametrum coniugatam HI: [*Iam vero in ellipſi quando eſt cuiuſvis ordinatae BM quadratum ad rectangulum HBI ſub diametri coniugatae ſegmentis, ut data recta ad diametrum eamdem HI, recta illa* parameter, *vel* latus rectum *illius diametri nuncupatur; quemadmodum ſimile quid de parametro, ſeu recto latere primariae diametri eſt alibi* (a) *demonſtratum; ergo HX eſt parameter, ſeu latus rectum diametri coniugatae HI.*]

a cor. 6. prop. 5.

Fig. 44. III. In Hyperbola vero MB quadratum ad ſummam quadratorum BC, CH eſt, ut NC quadratum ad (b) HC quadratum, ſive ut [*QN quadratum ad quadratum HI, vel ut QN quadratum ad rectangulum QNV* (c), *aut ut*] QN ad N√ (d), ſeu pariter ſumpta HX quarta proportionali poſt N√, HI, QN, ut ipſa HX ad HI, adeoque ipſa HX erit latus rectum (e), ſeu parameter diametri illius ſecundariae HI: quae pertineret ad binas alias Hyperbolas, diametro tranſverſa HI deſcriptas, velut Ii, HAh: quae duae Hyperbolae prioribus NM, QS *coniugatae* appellantur.

b ex hac prop. c poſt cor 2. pr. 12. & 17. Elem. d ex 1. VI. El. e Vid. Schol. ſeq.

[Scholium ad hoc Coroll.]

[*Ex eo quod in Hyperbola ſit MB quadratum ad ſummam quadratorum BC, CH, ut recta HX ad HI, non video, cur inferat noſter* Grandus, *eamdem HX parametrum eſſe, ſeu latus rectum diametro coniugatae HI correſpondens, ſeu, quod idem eſt, diametrum tranſverſam QN* (f) *eſſe mediam proportionalem*

f poſt coroll. 2. prop. 2.

lem inter coniugatam HI, & rectam illam HX. Caeterum id abunde liquet ex dictis; eſt enim quadratum QN ad quadratum HI, ut (a) *HX ad HI: ſed ut HX ad HI, ita eſt* (b) *rectangulum IHX ad HI quadratum; ergo quadratum QN eſt ad quadratum HI, ut rectangulum IHX ad idem HI quadratum, quare* (c) *QN quadratum aequale eſt rectangulo IHX, ideoque QN media eſt proportionalis inter diametrum HI, & HX: eſt vero etiam media inter eamdem diametrum* (d) *HI, & eiuſdem parametrum; igitur HX eſt parameter diametri coniugatae HI.*]

a ex *Coroll.* 3.
b 1. *VI. Elem.*
c 9. *V. Elem.*
d *poſt corol.* 2. *prop.* 12.

IV. Et quia ordinata AR, intra unam ex his coniugatis Hyperbolis, ad diametrum HI, habet quadratum ſuum AR, ad rectangulum IRH, ut rectum (e) HX ad tranſverſum HI; erit ergo quadratum TR, aut LR ad ſummam quadratorum RC, CH, ut quadratum AR ad rectangulum IRH, cum utraque ratio ſit eadem, quae HX ad HI (f).

e *cor.* 6. *prop.* 5.
f *ex Coroll.* 3.

V. Et permutando LR quadratum ad quadratum AR, ut ſumma quadratorum RC, & CH ad rectangulum IRH, quod eſt ipſorum differentia (g): ac dividendo, LR quadratum, dempto AR quadrato, ideſt (h) rectangulum TAL, ad quadratum AR erit, ut quadratum HC cum quadrato CR, dempto IRH rectangulo [*ad rectangulum IRH*], ideſt [*ut quadratum HC*] cum eodem quadrato HC (i), adeoque ut duplum quadrati HC ad ipſum IRH rectangulum: atque iterum permutando TAL rectangulum ad duplum qua-

g 6. *II. Elem.*
h 5. *II. Elem.*
i 6. *II. Elem.*

drati HC [*erit*,] ut quadratum AR ad IRH,
a *cor.* 6. ſive ut (a) HX ad HI, nempe, ut (b) CN quadra-
prop. 5. tum ad CH quadratum, ſive ut duplum quadra-
b *ex Co-* ti CN ad duplum quadrati HC; ideoque illud
roll. 3. rectangulum TAL aequatur (c) ſemper duplo
c *prop.* 9. quadrato CN; unde ubique eſt eiuſdem
V. El. quantitatis.

VI. [*Iam vero ſi ordinata TL motu ſibi ſemper parallelo ferri concipiatur ſupra diametrum CR, puncto R abeunte in H, rectae TA, AL degenerant in rectas aequales OH, YH, & TAL rectangulum abit in quadratum HY*]. Hinc ex termino H diametri HI ducta ad ipſum ordinata HY ſecante unam ex prioribus hyperbolis, velut EQS in Y, erit quadratum ipſius HY duplum
d *per ha-* quadrati CN. ut etiam hinc conſtat, quia (d)
nc prop. eſſet ordinatae HY quadratum ad ſummam quadratorum HC, & CH, ut MB quadratum ad ſummam quadratorum BC, CH, ideſt [*quadratum ordinatae HY eſſet*] ad
e *ex hac* duplum quadrati CH, ut quadratum CN ad
prop. quadratum CH (e); adeoque ut duplum CN
f 9. *V.* quadrati ad duplum [*quadrati*] CH, ideo-
Elem. que (f) HY quadratum aequatur duplo quadrati CN.

VII. [*Ex dictis liquet in Ellipſi, ſi*
Fig. 43. *ex eodem perimetri puncto M ordinentur MK, MB ad diametros coniugatas NQ, HI, fore rectangulum NKQ ad quadratum MK, ut*
g *ex cor.* *quadratum MB ad rectangulum HBI; eſt*
6. *pr.* 5. *quippe rectangulum NKQ ad quadratum MK,*
h *ex cor.* *ut* (g) *QN ad NV: ſed in eadem* (h) *ratione*
1. *eſt etiam quadratum MB ad rectangulum*

HBI

HBI; Ergo rectangulum NKQ eſt ad quadratum MK, ut quadratum MB ad rectangulum HBI.]

VIII. [*Demum quemadmodum in Hyperbola* (a), *ita & in Ellipſi diameter tranſverſa QN eſt media proportionalis inter coniugatam HI, eiuſque latus rectum, ſeu parametrum HX. Nam NV ad QN eſt, ut* (b) *HI ad HX: ſed ut NV ad QN, ita eſt* (c) *rectangulum QNV ad quadratum QN: & ut HI ad HX, ita eſt* (d) *quadratum HI ad rectangulum IHX; igitur rectangulum QNV eſt ad quadratum QN, ut quadratum HI ad rectangulum IHX: Sed rectangulum QNV aequatur* (e) *quadrato HI; igitur etiam quadratum QN aequabitur* (f) *rectangulo IHX, adeoque erit QN media* (g) *proportionalis inter HI, & HX.*]

a *poſt. co.* 2. *pr.* 12.
b *ex corol.* 2.
c 1. *VI. Elem.*
d *per eamdem.*
e *poſt co.* 2. *pr.* 12. & 17. *VI. Elem.*
f 14. *V. Elem.*
g 17. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XIV.

Quaecumque alia recta MC in Ellipſi, & oppoſitis hyperbolis, per centrum C ducta, eſt diameter, bifariam ſecans quaslibet NZ, HF ipſi applicatas parallelas tangenti GM. Fig. 45. 46.

Per verticem N prioris datae diametri NQ agatur tangens NI, ſecans ipſam CM in I, & tangentem MG in E, illaſque applicatas HF, hf in Æ, & æ, alteram ſupra NZ ductam ex vertice N, alteram infra ipſam. Ducantur quoque ad priorem diametrum ordinatae MK, TZ, HL, FB, Lh,

fb concurrentes cum CM ad puncta V, R,
S, s, & cum tangente MG in punctis Y, O,
A, a. Quoniam CK ad CN eſt, ut CN ad
a *cor.* 11. CG (a), erit quadratum CK ad quadratum
prop. 9. CN, ſeu triangulum (b) CKM ad ſimi-
b 19. *VI.* le CNI, ut CK ad CG, quae ſunt, ut
Elem. CKM triangulum (c) ad CGM triangu-
c 1. *VI.* lum, quae ſunt aeque alta; quare trian-
Elem. gula (d) CNI, CGM ſunt aequalia; & horum
d 9. *V.* alterutro ſublato a triangulo CKM [*in hy-*
Elem. *perbola nempe ablatis CNI, CGM a trian-*
gulo CKM, & in Ellipſi ablato CKM a tri-
angulis CNI, CGM], erit trapezium NKMI
aequale triangulo GKM: eſt autem hoc tri-
angulum ad ala ſimilia NTZ, PLH, PBF,
pLh, pbf, ut quadratum KM ad quadrata
e *pr.* 19. homologorum laterum TZ, LH, BF, Lh,
VI. El. bf (e), hoc eſt ex natura Ellipſis, & hyper-
f *pr.* 5. bolae (f), ut rectangulum QKN ad rectan-
& 6. gula illis correſpondentia QTN, QLN, QBN,
g 5. *&* 6. QLN, QbN, nempe (g) ut differentia qua-
II. El. drati CN a quadrato CK, ad differentiam
h 19 *VI.* eiusdem quadrati CN a quadratis CT, CL,
Elem. CB, CL, Cb, ſive ob analogiam (h) triangu-
lorum ſimilium, cum quadratis laterum ho-
mologorum, ut differentia trianguli CNI a
triangulo CKM, ad differentias eiusdem CNI
a triangulis CTV, CLR, CBS, CLR, Cbs;
hoc eſt, ut trapezium NKMI ad trapezia
NTVI, NLRI, NBSI, NLRI, NbsI; ut
igitur triangulum GKM aequatur NKMI, ita
NTZ aequabitur NTVI, & PLH erit aequa-
le NLRI, ac PBF erit aequale NBSI, ac
caetera triangula caeteris trapeziis aequa-
bun-

buntur. Itaque ex NTZ, & aequali ſpatio NTVI, ablato NTVX, remanebit XVZ aequale triangulo ſibi ſimili XIN, quorum latera (a) homologa XZ, & XN erunt aequalia. Similiter differentia triangulorum PBF, PLH, nempe trapezium LBFH, aequalis cum ſit differentiae trapeziorum illis aequalium NBSI, NLRI, ideſt trapezio LBSR, ſi ex his duobus trapeziis LBFH, & LBSR, auferatur commune ſpatium LBSDH, remanebunt aequalia ſimilia triangula SDF, RDH, quorum homologa latera DF, DH aequalia erunt. Item triangulo p h L [*quod ob aequalia homologa latera hL, LH, aequatur* (b) *ſibi ſimili triangulo PHL*] & illi aequali trapezio NLRI, addito L b s R, evadet ſpatium h p b s R aequale N bs I, ideſt triangulo p b f huic trapezio aequali, & ablato communi ſpatio p b s d, remanebit triangulum h R d aequale f s d ſibi ſimili, unde & eorum homologa latera h d, d f erunt aequalia. Igitur CM eſt diameter bifariam ſecans omnes ipſi applicatas NZ, HF, h f tangenti MG parallelas. Q. E. D.

a ex 19. VI. El.

b ex 19. VI. El.

Porro in Ellipſi fieri poteſt, ut ordinata f b ad priorem diametrum NQ cadat ultra centrum C verſus Q; & tunc, ducta alia verticali tangente Q i, conveniente cum MC in i, erit quoque triangulum p b f aequale trapezio Q b s i, (quod ad trapezium NKMI eſt, ut [*differentia ſimilium triangulorum CQi, C b s ad differentiam triangulorum ſimilium CNI, CKM, ſive ut* (c) *quadratum CQ, dempto C b quadrato, ad quadratum CN, dempto* qua-

Fig. 47.

c 19. VI. Elem.

a 5. *VI. Elem.* — *quadrato CK, ſive* (a) *ut*] rectangulum Q b N ad QKN, ſive ut (b) quadratum f b ad quadratumMK, aut ut triangulum (c) p b f ad ſimile GKM, quod vidimus aequari NKMI); additoque utrinque s b C, erit ſpatium p C s f aequale triangulo QC i, ſeu CNI huic aequali; & ablato C d p, triangulum d s f aequabitur N p d I, quod aequatur d R h triangulo, propter p L h aequale NLRI, & commune ſpatium L p d R utrinque appoſitum; Ergo aequalium, & ſimilium triangulorum d s f, & d R h homologa latera f d, & d h pariter ſunt aequalia. Q. E. D.

b *ex pr. 6.*

c 19. *VI. Elem.*

COROLLARIA.

Fig. 45. 46. 47.

I. VTi oſtenſum eſt triangulum CGM aequale CNI; ablato communi quadrilineo CGEI in hyperbola, & CMEN in Ellipſi, remanet triangulum IEM aequale GEN, & utrique addito NEMX, fit triangulum IXN aequale trapezio MXNG.

II. Pariter iisdem triangulis IEM, GEN addito ſpatio NEMSB, reſultat GMSB aequale NBSI, cui oſtenſum fuit aequale triangulum PBF; hoc igitur erit aequale GMSB; & utrinque ablato PDSB, reſultat triangulum DSF, (vel huic aequale DHR) aequale trapezio MDPG. Similiterque iisdem triangulis IEM, GEN, addito N b s ME, reſultat N b s I, quod vidimus aequari triangulo p b f, aequale G b s M, & ablato p b s d, remanet triangulum d s f aequale trapezio M d p G.

III. Hinc patet, ad quamlibet aliam diame-

metrum MC ordinatarum quadrata XZ, DF, df eſſe, ut rectangula partium diametri mXM, mDM, mdM: ſunt enim illa quadrata, ut triangula ſimilia XZV, (ſeu XNI,) DFS, dfs (a), quae vidimus aequari (b) trapeziis MXNG, MDPG, MdpG, atque adeo eſſe, ut differentias trianguli CMG a triangulis ſimilibus CXN, CDP, Cdp, quae ſunt ut dicta rectangula, nempe ut differentiae quadrati CM a quadratis homologorum laterum CX, CD, Cd: quare XZ quadratum eſt ad quadrata DF, df, ſeu quadratum NX ad quadrata HD, hd, ut rectangulum mXM, ad mDM, mdM.

a 19. *VI. Elem.*
b *cor.* 1. & 2.

IV. Hinc quaecumque oſtenſa ſunt circa tangentes, & circa parametrum diametri primigeniae QN, ad quamlibet aliam diametrum per centrum C deductam, referri poſſunt ad eamdem eſſentialem proprietatem eius ordinatarum hic demonſtratam; nempe ut tangens MD dividit diametrum QN, ut ſint continue proportionales (c) CK, CN, CG, & GCK aequetur quadrato ſemidiametri CN (d), atque harmonica evadat ratio QK ad KN, ut QG ad GN (e); ſic tangens NI ſecat diametrum mCM, ut CX, CM, CI ſint continue proportionales, & rectangulum XCI aequetur quadrato ſemidiametri CM; nec non harmonice ſecta ſit eadem diameter, nempe mX ad XM ſit, ut mI ad IM.

c *cor.* 11. *pr.* 9.
d 17. *VI. Elem.*
e *cor.* 12. *prop.* 9.

V. Atque parameter huius diametri CM determinabitur, ſi fiat ut rectangulum partium ipſius mDM ad quadratum ordinatae DF, ita

eadem tranſverſa diameter mM ad aliam li-
a *cor.* 6. neam; haec enim (a) parameter erit, ſeu la-
prop. 5. tus rectum, quod ſe habet ad tranſverſum,
& 6. (ubi quadrata ordinatarum ſunt, ut rectan-
gula partium diametri), ut quadratum or-
dinatae ad rectangulum ipſi correſpondens ex
diametri partibus.

VI. Quaecumque oſtenſa ſunt in Parabo-
la (b) de aequalitate triangulorum cum qua-
b *cor.* 3. drilateris correſpondentibus, etiam hiſce Hy-
4. 5. 6. perbolis, & Ellipſibus, ob eandem ratio-
pr. 10. nem hic repetendam, conveniunt; Nimi-
rum quod ORM aequatur OHPG, [*ob DHR*
c *cor.* 2. *aequale* (c) *MDPG*]; unde duo ſimul tri-
angula PHL, ORM toti GLO aequantur;
non tamen quod quadrata HL, OR ſint ae-
qualia quadrato LO, [*quemadmodum vidi-*
d *cor.* 3. *mus* (d) *in Parabola*], quia diametri NK,
pr. 10. MD hic non ſunt parallelae, ut in Parabola;
& ideo triangula DHR, PLH non ſunt ſi-
milia. Idem dicendum, de triangulo MSA
aequali trapezio rPGA, ac de triangulis PBF,
MSA [*aequalibus triangulo PBF, & qua-
drilineo FPGA, ſeu*] aequalibus GAP, &
ſic de aliis.

VII. Quod vero ſit rectangulum ſecan-
tis in partem externam, tangenti, & cur-
vae interpoſitam, ad quadratum tangentis,
puta ΦAF ad AM quadratum, ut tangentis
parallelae ſecanti NE quadratum ad quadra-
tum alterius contiguae tangentis EM (& ſic
etiam FÆH ad quadratum ÆN, aut fæ h
ad æN quadratum, ut ME quadratum ad qua-
dratum EN) etiam in Hyperbola, et Ellipſi
obti-

obtinet, idque etiamſi ex duabus oppoſitis
hyperbolis tangentes ductae forent, invicem a *in pr.*
conveni'entes, infra generatim (a) demon- *16.*
ſtrabitur.

PROPOSITIO XV.

Ex quolibet puncto H in perimetro Hyper- Fig. 48.
bolae, aut Ellipſis, inter binas diametros 49. 50.
CN, CM, ſumpto (vel etiam extra ipſas 55. 58.
in Ellipſi), ſi agantur HR, HP tangentibus
NI, MG parallelae, uſque ad ipſas diametros
productae in R, P; quadrilaterum PHRC
aequabitur triangulo CGM, aut CNI.

Nam quia DHR aequatur trapezio DM
GP (b) utrovis dempto in hyperbola ex trian- b *cor.* 2.
gulo CPD, vel hoc utrivis addito in Ellipſi, *pr.* 14.
reſultabit quadrilaterum PHRC aequale tri-
angulo CGM: [*iam vero in primis tribus figu-*
ris triangulum CNI equatur triangulo CGM (c): c *ex de-*
igitur quadrilineum PHRC aequabitur etiam *monſ. pr.*
triangulo CNI. Ad reliquas autem figuras 14.
quod ſpectat, ducta ad extremitatem n dia-
metri n CN verticali tangente n i, quae oc-
curret diametro ML in puncto i, eritque pa-
rallela alteri tangenti verticali NI, cum u- d *ex pr.*
traque aequidiſtet ordinatis (d) *ad diametrum* 14.
n CN; aequalia erunt triangula CGM, C n i (e): e *ex de-*
eſt autem triangulum C n i aequale trian- *monſ. pr.*
gulo (f) *ſibi ſimili CNI ob C n aequalem CN;* 14.
ergo aequantur etiam triangula CGM, CNI, f *ex* 19.
ideoque quadrilaterum PHRC aequale erit *VI. El.*
etiam triangulo CNI.] Q. E. D.

PRO-

COROLLARIA.

Fig. 48. 49. 50. I. HInc ſi ex alio puncto A perimetri Hyperbolici, aut Elliptici, agantur iiſdem tangentibus parallelae AT, AL ad ipſas diametros productae in T, L, etiam quadrilaterum LATC aequabitur eidem triangulo [CNI, *vel*] CGM, adeoque ipſa quadrilatera PHRC, LATC erunt aequalia.

II. Convenientibus AT, PH in K, differentiae cuiuſvis ex dictis quadrilateris aequalibus ab alio PKTC, nempe trapezia KHRT, PKAL, erunt aequalia.

III. Et convenientibus etiam AL, HR in Z, addito [*in hyperbola*], vel dempto [*in Ellipſi*] a dictis trapeziis AKHZ, fiet AZRT aequale HZLP.

[*Scholium*.]

Fig. 60. 61. 64. [*Quod in ſecundo huius propoſitionis corollario tam in Ellipſi, quam in Hyperbola demonſtratur, etiam in Parabola, & oppoſitis Hyperbolis habet locum; nempe ſi tangentibus ND, MG agantur ex punctis H, K parallelae HS, KQ, HP, KO, quarum duae KQ, HP conveniant in puncto R, quadrilaterum HSQR aequabitur alteri KOPR. Eſto imprimis punctum concurſus R* Fig. 60. *intra Parabolam NHKM. Quoniam triangulum hPN aequatur* (a) *quadrilatero hDSH,* a cor. 6. pr. 10. *utrinque addito iOPb, erit triangulum iON aequale quadrilateris hDSH, iOPb,* *ſeu*

ſeu quadrilateris g OPH, i DS g: ſed idem triangulum i ON aequatur etiam (a) *quadrilatero i DQK, vel quadrilateris g SQK, i DS g; igitur etiam quadrilatera g OPH, i DS g aequabuntur quadrilateris g SQK, i DS g, ideoque quadrilaterum g OPH aequale erit g SQK, & utrinque addito g HRK, erit HSQR aequale quadrilatero KOPR.*] a per idem Cor.

[*Sit deinde punctum concurſus R extra parabolam NKHM. Quia triangulum NO i aequatur* (b) *quadrilatero i DQK, utrinque addito i OP b, erit triangulum NP b aequale quadrilateris i OP b, i DQK, ſeu quadrilateris KOPR, b DQR: ſed triangulum NP b aequatur* (c) *etiam quadrilatero HSD b vel quadrilateris HSQR, b DQR; igitur etiam quadrilatera KOPR, bDQR aequantur quadrilateris HSQR, bDQR, ideoque quadrilaterum KOPR aequabitur alteri HSQR.*] Fig. 61. b cor. 6. pr. 10. c per idem Cor.

[*In oppoſitis demum Hyperbolis eſt quadrilaterum KOCQ aequale* (d) *triangulo CND, & quadrilaterum HSCP aequale* (e) *eſt triangulo CGM: ſed triangulum CND aequatur triangulo CGM* (f); *igitur quadrilaterum KOCQ aequabitur quadrilatero HSCP, unde utrivis addito CQRP, reſultabit quadrilaterum KOPR aequale HSQR.*] Fig. 64. d per hanc prop. e per eamdem. f per eamdem.

PROPOSITIO XVI.

IN omni Sectione Conica ſi duae tangentes eiusdem Sectionis, vel hyperbolarum oppoſitarum ME, NE conveniant in E, & quaepiam recta FÆ, uni tangenti ME parallel- Fig. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58.

rallela, ſecet curvam in H, F, & aliam tangentem NE in Æ, erit rectangulum FÆH
a 19. VI. Elem. ad quadratum NÆ, ut quadratum ME ad EN quadratum.
b 6. II. Elem.

Ducantur per puncta contactus M, N
c 19. VI. Elem. diametri MD, NK, ſecantes ipſam HF in D, & P, tangentem NE in I, & ME in
d cor. 2. pr. 10. G, atque parallelam ipſi NE per H ductam in R, K. Erit quadratum ÆD ad triangu-
& cor. 2. pr. 14. lum ÆDI, ut quadratum (a) HD ad triangulum HDR alteri ſimile; unde differentia
e Fig. 51. 52. antecedentium, nempe (b) rectangulum FÆH, (nam HF bifariam dividitur in D à dia-
f Fig. 54. 56. 57. metro MD, cui eſt ordinata, utpote parallela tangenti ME) ad trapezium IÆHR,
g in fig. 51. 56. [*quod eſt differentia conſequentium*] erit, ut unum antecedens, [*nempe quadratum*
h in fig. 52. 54. 57. *ÆD*] ad unum conſequens, [*ſeu triangulum ÆDI*], ſive ut quadratum ME ad triangulum EMI, quod pariter eſt, (c) ut ÆD
i in Fig. 53. 55. 58. quadratum ad ÆDI: eſtque IÆHR aequale triangulo ÆPN; (nam PHK aequatur (d) NKRI, in Parabola (e), & quibuſdam aliis (f)
k ex pr. 15. figuris; unde ablato (g), vel addito (h) NÆHK, ſuperſunt aequales IÆHR, & ÆPN;
l in Fig. 53. In Ellipſi vero, & Hyperbolis (i), ob quadrilineum CRHP aequale (k) triangulo CNI,
m in Fig. 55. ablato (l), vel addito (m) CIÆP, aut CRHÆN (n) reſultat IÆHR aequale ÆPN); et
n in Fig. 58. triangulum EMI aequatur ENG (o); ergo [*cum oſtenſum ſit rectangulum FÆH eſſe ad tra-*
o pr. 10. & cor. I. pr. 14. *pezium IÆHR, ut quadratum ME ad triangulum EMI, etiam*] rectangulum FÆH ad trian-

triangulum ÆPN eſt, ut quadratum ME ad triangulum ENG; & permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ME, ut triangulum ÆPN ad triangulum ENG, ſive (a) ut quadratum ÆN ad EN quadratum; unde iterum permutando, rectangulum FÆH ad quadratum ÆN eſt, ut quadratum ME ad quadratum EN. Q. E. D. a pr. 19. VI. El.

COROLLARIA.

I. DVcta MN iungente contactus, quae ſecet HF in V, erunt FÆ, VÆ, HÆ continue proportionales, ideſt rectangulum FÆH aequabitur ÆV quadrato, quod pariter ad quadratum ÆN eſt, ut EM quadratum (b) ad quadratum EN [*ob ſimilia triangula VNÆ, MNE, vel*] ſicut dictum rectangulum FÆH eſt (c) ad ÆN quadratum, [*ideoque ÆV quadratum* (d) *aequatur rectangulo FÆH.*] b ex 4. & 22. VI. Elem. c ex hac prop. d ex 9. V. El.

II. In Parabola etiam quadratum ÆP aequabitur rectangulo FÆH: nam [*ob parallelas MG, VP, eſt ME ad EG, ut VÆ ad ÆP; unde*] ut ME aequatur EG ob proprietatem tangentis (e), ita VÆ aequalis erit ÆP; unde (f) utriuſvis quadratum aequatur rectangulo FÆH. Fig. 51, 52. e ex cor. 13. pr. 9. f ex cor. 1.

III. Si plures ſecantes invicem parallelae FH, fh cum aliqua tangente NE concurrant in Æ, æ, rectangula FÆH, fæh erunt, ut quadrata partium interceptarum tangentis NÆ, Næ: nam illis aequantur (g) quadrata ÆV, æu, quae [*ob ſimilitudinem* Fig. 59. g ex cor. 1.

trian-

a ex 4., & 22. *VI. Elem.* *triangulorum* NÆV, N*æu*], ſunt ipſis quadratis NÆ, Næ (a) proportionalia.

Fig. præced. b 6. *II. Elem.* c ex cor. 1. IV. Quoniam HF bifariam ſecta in D a ſuo diametro, exhibet rectangulum FÆH cum quadrato HD aequale (b) quadrato DÆ, ſubſtituto quadrato ÆV dicto rectangulo (c) aequali, erunt quadrata ÆV, & HD ſimul ſumpta, aequalia ÆD quadrato.

Fig. 51. 52. d cor. 2. e 3. *II. El.* f cor. 1. g 3. *II. El.* h 16. *VI. Elem.* i 19. *V. Elem.* V. Quoniam in Parabola VÆ aequatur ÆP (d), rectangulum VHP cum quadrato ÆH aequatur quadrato ÆV (e), nempe rectangulo FÆH (f), ideſt rectangulo FHÆ, cum quadrato HÆ (g); quare utrinque dempto HÆ quadrato, rectangulum VHP aequatur rectangulo FHÆ: & ideo (h) FH ad HP, eſt ut [*ablata*] HV ad [*ablatam*] HÆ, ſive (i) ut reliqua VF ad reliquam PÆ, ſeu [*permutando*] eſt FH ad HV, ut PH ad HÆ, ſive ut PK ad KN.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. **S**I rectae HF, TK binis tangentibus MA, NA convenientibus in A, parallelae, ſecent quamlibet Conicam Sectionem, aut duas oppoſitas Hyperbolas in H, F, K, T, ipſae autem conveniant in R, ſive intra, ſive extra Sectionem, erit rectangulum HRF ad rectangulum KRT, ut quadratum tangentis MA ad quadratum tangentis AN.

Ductis per contactus diametris ME, NL, ad quas ordinantur ipſae FH, TK tangentibus parallelae, adeoque bifariam ſecantur

tur in E, L, agatur KO parallela MA, & HS parallela AN, ſecantes diametros in O, S, quas etiam ſecant productae tangentes in G, D, & productae FH, TK in P, Q. Manifeſtum eſt utique, eſſe [*quadratum HE ad quadratum RE, ut triangulum HES ad ſibi ſimile REQ, quare dividendo, eſt differentia quadratorum HE, RE ad quadratum RE, ut differentia ſimilium triangulorum HES, REQ ad triangulum REQ, & permutando, differentia quadratorum HE, RE ad differentiam ſimilium triangulorum HES, REQ, ut quadratum RE ad triangulum REQ, vel ut quadratum HE ad ſimile triangulum HES; igitur etiam erit*] rectangulum HRF, quod (a) eſt differentia quadratorum HE, RE, ad trapezium HSQR, quod eſt differentia ſimilium triangulorum HES, REQ, ut quadratum HE ad triangulum HES, vel ut MA quadratum ad ſimile triangulum AMD, vel ad ANG (b) ipſi aequale: trapezium autem HSQR, quod aequatur alteri KOPR (c) erit ad rectangulum KRT pariter, ut triangulum KLO ad quadratum KL, ſive ut triangulum ANG ad quadratum AN (d); ergo ex aequo, rectangulum HRF ad KRT eſt, ut quadratum MA ad AN quadratum. Q. E. D.

a 5. & 6. *II. El.*

b *pr.* 10. & *cor.* 1. *pr.* 14.

c *cor.* 2., & 3. *pr.* 15. & *Schol. eiuſ.*

d *pr.* 19. *VI. El.*

COROLLARIA.

I. SI duae aequidiſtantes chordae HF, XZ ſecentur ab alia KT in R, V, erit rectangulum HRF ad ZVX, ut KRT ad KVT; quippe alternatim HRF ad KRT eſt, ut ZVX ad

ad KVT, nempe ut quadratum tangentis MA, prioribus ſecantibus parallelae, ad quadratum AN paralleiae alteri ſecanti KT (a).

a *per hanc prop.*

II. Si rectae HF, KT concurrentes in R ſint parallelae binis aliis XZ, YH convenientibus in I, tam HRF ad KRT, quam XIZ ad YIH erunt in eadem ratione quadrati (b) MA tangentis, ad quadratum tangentis AN; Vnde [*ut HRF ad KRT, ita eſt XIZ ad YIH, &*] permutando, HRF ad XIZ erit, ut KRT ad YIH.

b *per hanc prop.*

Fig. 60. 61.

III. In parabola eadem rectangula HRF, KRT ſunt etiam, ut parametri diametrorum ME, NL, ad quas illae rectae ordinantur: nam ex concurſu R ducta RB diametris parallela, rectangulum HRF aequatur rectangulo parametri ad diametrum ME pertinentis, ducti in RB (c), & ſimiliter rectangulum KRT aequatur rectangulo ex ductu parametri pertinentis ad aliam diametrum NL in eamdem RB (d); ergo talia rectangula ſunt ut dictae parametri (e).

c *pr. 11.*

d *per eamdem.*

e *prop. 1. VI. Elem.*

IV. Vnde [*cum huiuſmodi rectangula HRF, KRT ſint etiam, ut quadrata* (f) *tangentium MA, AN;*] colligitur (g), parametros variarum diametrorum parabolae eſſe, ut quadrata tangentium ipſarum vertices, & invicem concurrentium; nempe ut MA quadratum ad AN quadratum, ita latus rectum diametri ME ad latus rectum alterius diametri NL.

f *per hanc prop.*

g *ex coroll. 3.*

V. In Ellipſi vero, & Hyperbola tangentium quadrata ſunt in ratione compoſita diametrorum ductarum ex contactibus, &

ipſa-

ipſarum parametrorum illis reſpondentium; adeoque ſunt, ut [*rectangula ex illarum diametrorum ductu* (a) *in ſuas parametros, vel ut*] quadrata ſemidiametrorum (b) coniugatarum, quae ipſis tangentibus ſunt parallelae; ideoque in hac ratione (c) pariter ſunt rectangula ex partibus ſecantium has ſectiones dictis tangentibus parallelarum; id quod in Ellipſi patet, quia per centrum ipſum [*C*] ductis [*FB*, *DT*] parallelis tangentibus [*NE*, *ME*], earum rectangula [*FCB*, *DCT*] erunt dictarum ſemidiametrorum coniugatarum [*FC*, *DC*] quadrata, ipſis tangentium parallelarum [*NE*, *ME*] quadratis (d) proportionalia. In Hyperbola aeque ac in Ellipſi hoc idem demonſtrabitur in Coroll. 2. & 3. ſequentis propoſitionis.

a *cor.* 2. *pr.* 23. *VI. El.*
b *poſt corol.* 2. *prop.* 12.
c *ex hac prop.*
Fig. 67.
d *ex hac prop.*

PROPOSITIO XVIII.

SI ad terminos cuiuſvis diametri Q, N, Sectionis Ellipticae, aut Hyperbolicae, agantur tangentes QR, NE, quae erunt parallelae, utpote ordinatis aequidiſtantes, & alia tangens MG illas ſecet in R, E, rectangulum ex QR in NE aequabitur quadrato ſecundariae ſemidiametri CB, priori QN coniugatae.

Fig. 67. 68.

Nam ex proprietate tangentis MG, ordinata ad diametrum MK, erit QG ad GN, ut QK ad KN (e); unde QG plus GN in Ellipſi, ſeu QG minus GN in Hyperbola, erit ad GN, ut QK plus KN in Ellipſi, ſeu mi-

e *ex cor.* 12. *pr.* 9.

minus KN in hyperbola, ad KN: [*Sed QG plus GN in Ellipſi, vel QG minus GN in Hiperbola, eſt dupla CG: item QK plus KN in Ellipſi, ſeu QK minus KN in Hyperbola, eſt dupla CQ; igitur dupla CG eſt ad GN, ut dupla CQ ad KN,*] & ſumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GN,
a 12. *V.* ut CQ ad KN; unde ſumma (a) anteceden-
Elem. tium QG ad ſummam conſequentium KG e-
rit, ut primum antecedens CG ad primum
conſequens GN: eſt autem ob ſimilia trian-
gula [*QGR, KGM, CGL, NGE*], QG
ad KG, ut QR ad KM, & CG ad GN, ut
b 16. *VI.* CL ad NE; ergo ſunt in eadem ratione
Elem. QR, KM, & CL, NE, adeoque (b) rectan-
c 34. *I.* gulum ex QR in NE aequatur rectangulo
Elem. KM in CL; ideſt, ducta MH parallela CN,
d *poſt co.* quae ex ſemidiametro CB ſecabit CH aequa-
2. pr. 12. lem KM (c), erit QR in NE aequale LCH:
e *cor. 6.* ſed rectangulo LCH aequatur ſemidiametri
pr. 5. & 6. CB quadratum; eſt enim primariae ſemi-
f *cor.* 8. diametri CN quadratum ad ſemidiametri co-
prop. 9. niugatae CB quadratum, ut tranſverſa QN
g *cor.* 2. ad ſuam parametrum (d), ſcilicet [*ut* (e) *re-*
prop. 23. *ctangulum QKN ad quadratum KM, vel*]
VI. El. ut rectangulum CKG, quod aequatur QKN (f),
h *ex pro.* ad quadratum KM, ſeu in ratione (g) com-
34. I. El. poſita ex CK ad KM, ſive (h) ad CH, &
i *cor.* 2. GK ad KM, hoc eſt CG ad CL, ideoque (i)
prop. 23. ut CK in CG ad CL in CH, [*ergo CN*
VI. El. *quadratum eſt ad quadratum CB, ut rectangu-*
k *cor.* 11. *lum KCG ad rectangulum LCH*]: ſed KCG
prop. 9. aequatur CN quadrato (k); ergo LCH eſt ae-
l 14. *V.* quale (l) quadrato CB; ideoque etiam QR
Elem. in

in NE, quod vidimus aequari LCH, aequatur quadrato coniugatae ſemidiametri CB. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. PEr contactum M ducta alia diametro MCS, ductaque tangente SA, quae parallela erit MG, conveniente in A cum alia tangente NE, quae diametro MS occurret in I, ductaque ex centro CD parallela ME, quae ſit ſemidiameter ſecundaria coniugata ſemidiametro CM, erit pariter rectangulum SA in ME aequale quadrato ſemidiametri CD ob eamdem rationem; [*unde rectangulum QR in NE eſt ad rectangulum SA in ME, ut CB quadratum ad quadratum CD.*]

II. Ductis QS, NM, GI, quae (a) invicem parallelae erunt (ob aequalitatem triangulorum (b) NEG, MEI, adeoque etiam NGM, NMI, & ob aequales rectas NC, CQ, & MC, CS), erit [*QC ad CG, ut* (c) *SC ad CI, & componendo, QG ad GC, ut SI ad IC: ſed GC eſt ad GN, ut* (d) *IC ad IM; igitur ex aequo eſt*] QG ad GN, ut SI ad IM; unde & QR (e) ad NE, ut SA ad ME, [*& permutando QR ad SA, ut NE ad ME*]; & ideo rectangulum QR in NE ad rectangulum SA in ME erit [*in ratione* (f) *compoſita ex aequalibus rationibus QR ad SA, & NE ad ME, ſeu*] in duplicata ratione NE ad ME: Vnde QR in NE ad SA in ME, ideſt quadratum CB ad qua-

a *prop.* 4. 28.&39. *I. Elem.*
b *ex pr.* 14.
c *pr.* 4. *VI. El.*
d *ex pr.* 2. *VI. El.*
e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*

a ex cor. 1. dratum (a) CD erit, ut quadratum NE ad quadratum ME (b).

b cor. 1. prop. 20. VI. El. III. Et ideo ſi duae chordae, tangentibus NE, ME parallelae, invicem conveniant, erunt ipſarum rectangula, ut quadrata ſemidiametrorum CB, CD ipſis aequidiſtantium, cum ſint ut (c) quadrata dictarum tangentium.

c ex pro. 17.

Fig. 85. 86. IV. [*Quare ſi per centrum C Ellipſis, aut Hyperbolae traiecta ſit diameter TH, parallela cuivis chordae SR, quam ſecat in F chorda altera per centrum traducta QN; erit rectangulum QFN ad rectangulum SFR, ut quadratum QN ad quadratum TH; nam rectangulum QFN eſt ad rectangulum SFR, ut* (d) *quadratum ſemidiametri, aequidiſtantis chordae QN, ad quadratum ſemidiametri TC, aequidiſtantis alteri chordae SR: ſed quadratum ſemidiametri, aequidiſtantis chordae QN, idem plane eſt cum quadrato QC, quippe diameter parallela chordae QN, coincidit cum eadem chorda QN per centrum traducta; ergo rectangulum QFN eſt ad rectangulum SFR, ut quadratum QC ad quadratum TC, vel ut quadratum QN ad quadratum TH.*]

d ex cor. praeced.

Fig. 67. 68. V. [*Cum in huius propoſitionis demonſtratione quadratum CB oſtenſum ſit aequale rectangulo LCH, erunt in* (e) *continua proportione rectae CH, CB, CL; quare ſi ex Ellipſeos, aut Hyperbolae quolibet puncto M, ducta MH parallela primariae diametro NQ, ſeu ordinata ad ſemiconiugatam BC, agatur tangens ML; haec ita in L occurret ſemiconiugatae BC,*

e 17. VI. Elem.

ut

ut ſint continue proportionales CH, CB, CL.]

PROPOSITIO XIX.

IN axe Parabolae NK ponatur NF infra verticem aequalis quartae parti ſuae parametri, atque ipſi NF ponatur ſupra verticem aequalis NP, & ducatur PV parallela ordinatis: ducta ex F ad quodlibet curvae punctum M recta FM, ductaque tangente OMG, ac diametro MX, axi NK parallela, erit angulus XMO aequalis FMG; et ipſa MF erit pariter aequalis quartae parti parametri ad diametrum MX pertinentis. Fig. 69.

Dicatur autem punctum F *focus* Parabolae; & punctum P eius *ſublimitas*; & recta PV *Linea ſublimitatis*.

Ordinata ad axem MK, erit quadratum MK aequale rectangulo KN in (a) quadruplam NF, quae eſt (b) parameter axis; ergo quadruplum rectanguli KNF cum quadrato FK aequatur quadratis MK, & KF, ideſt (c) quadrato FM: ſed ob NP aequalem NF, quadratum PK eſt pariter aequale quadruplo rectanguli KNF cum quadrato FK (d); ergo quadratum FM aequatur PK quadrato; unde FM aequatur PK, ſive aequatur FG: Nam ob NK aequalem NG (e), & NF aequalem NP, erit FK aequalis PG, adeoque [*utrinque adiecta PF,*] PK aequatur FG. Eſt igitur GFM triangulum aequicrure, adeoque angulus FMG aequatur MGK (f), ſive exter-

a *cor.* 1. *pr.* 4.
b *ex hyp.*
c 47. *I. Elem.*
d *pr.* 8. *II. El.*
e *cor.* 6. *pr.* 9.
f 5. *I. Elem.*

a 27. *I. Elem.* no parallelarum XMO (a). Quod erat primo demonſtrandum. Et producta diametro MX ad lineam ſublimitatis PV in V, erit MV

b 34. *I. Elem.* aequalis PK (b), ideoque aequalis MF; Atque ordinata NX, tangenti MG parallela, & ex axis vertice ducta tangente ND, quae [*erit ordinatae KM parallela, ideoque ſicuti ſubtangentem KG biſecat in N, ita etiam*] bifariam ſecabit MG in D, iuncta DF, erit DG quadratum aequale rectangulo FGN: cum ſit enim MD aequalis DG, ut KN ae-

c *cor. 6. prop. 9.* quatur NG (c), ſitque MF aequalis GF, & angulus FMD aequalis FGD, etiam reliqui

d 4. *I. Elem.* anguli horum triangulorum aequales erunt (d), adeoque GDF eſt angulus rectus, quippe aequalis conſequenti MDF, ergo [*cum DN perpendiculariter inſiſtat rectae GF, erit FG*

e 8. *VI. Elem.* *ad GD* (e), *ut GD ad GN, adeoque*] GD quadratum aequatur [*rectangulo*] FGN (f), ſive

f 17. *VI. Elem.* aequatur MF in MX, quia FG aequatur MF, & GN eſt aequalis MX (g), at GD quadratum eſt

g 34. *I. Elem.* quarta pars quadrati MG, vel XN, quae ipſius GD ſunt duplae; ergo ordinatae XN quadratum eſt quadruplum rectanguli FM in MX; Sed [*idem XN quadratum*] aequatur rectangulo ſuae parametri in abſciſſam

h *cor. 1. pr. 10.* MX (h): ergo FM erit quarta pars dictae parametri. Q. E. D.

COROLLARIA.

Fig. *69. 70.* I. CVm ex Catoptrica ita reflectantur radii, ut angulus incidentiae XMO aequetur angulo reflexionis FMG; patet, om-

omnes radios axi parallelos, ex remotiſſimo luminoſo corpore, velut e Sole, deſcendentes (qui velut paralleli habentur, multo magis, quam directiones gravium eiusdem loci in centrum Terrae, ipſo Sole multo proximius), & in parabolicum ſpeculum MN m incidentes, nempe XM, xm, x m &c., in punctum illud F reflecti debere, adeoque ibidem ex eorum concurſu ignem excitari; & ideo punctum illud *focus* appellatur.

II. Viciſſim, ſi lumen aliquod in hoc foco F ſpeculi parabolici poſitum fuerit, emittet radios FM, F m, F m, qui reflexi in lineas MX, mx, mx axi parallelas extendentur, unde in magna aliqua diſtantia eamdem intentionem ſervabunt, quam habent prope ipſum lumen, veluti in MX: unde caracteres a lumine remotiſſimi legi poterunt, & diſtantium locorum ſuperficies commode illuſtrari.

III. Linea FD, coniungens focum ad concurſum tangentis verticalis axis cum alia laterali tangente, eſt huic ipſi tangenti perpendicularis: oſtendimus enim angulum FDG rectum eſſe. Fig. 69.

IV. Etiam MV portio diametri MX a ſuo vertice M ad lineam ſublimitatis PV, eſt quarta pars parametri ſibi correſpondentis: nam FM aequalis FG, aequatur PK, adeoque eſt aequalis MV: & ubilibet ducta F m aequatur axi parallelae m u ad dictam lineam ſublimitatis extenſae: unde quaelibet FM ad MV eſt ut FN ad NP.

Fig. 70. V. Quaelibet XM cum MF aequatur alteri x m cum m F ; aequatur enim XV (a), ſive TP (b), propter MV aequalem MF (c) : [*ſed ob m u aequalem m F, eſt etiam x m cum m F aequalis x u, vel TP ; igitur XM cum MF aequatur x m cum m F.*]

a *cor.* 4. b 34. *I. Elem.* c *cor.* 4.

VI. Sumptis in perimetro parabolae, hinc inde ab axe, binis punctis M, B (aut ex eadem parte M, b), & iunctis ad focum F rectis MF, BF (ſeu bF), ductiſque tangentibus MG, BH convenientibus in L (aut MG, b h, concurrentibus in l), erit angulus MFB duplus contenti a tangentibus GLB (ſive MFb duplus G l b). Nam quia oſtenſum eſt aequicrure triangulum MFG, aut BFH (vel b F h (d),) externus angulus KFB (e) duplus eſt interni FHB (& KF b duplus F h b), nec non MFK duplus MGF; unde KFB plus MFK, ſcilicet MFB, aequatur duplo FHB cum duplo MGF; ſive HGL, quibus (f) aequatur duplum GLB (at KFb minus MFK, ſcilicet MF b, aequatur duplo F h b, minus duplo MG F, ſive h G l, quibus aequale eſt duplum G l b): quare angulus ex ramis ad focum ductis MFB, aut MF b, duplus eſt anguli a tangentibus contenti GLB, aut Glb.

Fig. 71. d *per hanc prop.* e *per* 1. *part. pr.* 32. *I. El.* f *per eamdem.*

VII. Quod ſi puncta M, B ſint in eadem recta linea cum foco F, tangentes ML, BL in angulum rectum MLB convenient ; eo quod anguli BFK, & KFM ſint duobus (g) rectis aequales, & eorum medietas ſit angulus ille MLB a tangentibus comprehenſus.

Fig. 72. g 13. *I. Elem.*

VIII. Hinc ipſa recta MB erit parameter diametri LSR bifariam ſecantis MB illi or-

ordinatam. Circulus quippe triangulo MBL circumſcriptus habebit centrum in R, quia rectus angulus L erit in ſemicirculo; quare MB erit dupla radii RL, & RL eſt dupla (a) RS, ſive (ducta tangente SH parallela MB) eſt dupla FH (b), cui aequatur FS, uti oſtenſa fuit FM aequalis FG (c); ergo MB eſt quadrupla FS: Sed haec eſt quarta pars parametri ad diametrum SR pertinentis (d); ergo ipſa MB eſt eius parameter.

IX. Iuncta LF erit quoque perpendicularis MB: cum enim oſtenſae ſint aequales LS, SR, FS (e), angulus LFR erit (f) rectus, quippe in ſemicirculo circa diametrum LR deſcripto; & ideo quadratum LF aequatur (g) rectangulo MFB.

X. Ipſe autem rectus angulus MLB a tangentibus comprehenſus eſt in recta PV ſublimitatis eiusdem parabolae, quia FS aequatur SL, ut FN aequatur NP; unde punctum L ad rectam PV pertinet, cuius eſt talis proprietas (h).

PROPOSITIO XX.

IN axe tranſverſo Ellipſis, & Hyperbolarum oppoſitarum, determinatis rectangulis QFN, NVQ aequalibus quadrato ſemiaxis ſecundarii coniugati CB, ſeu quartae (i) parti rectanguli per tranſverſum QN, & per latus rectum NS comprehenſi, ad quodlibet punctum curvae M iunctis rectis FM, VM ex utroque puncto F, V, comprehendent cum tangente GME angulos aequales. Vo-

cen-

a *cor.* 6. *prop.* 9.
b 34. *I. Elem.*
c *ex hac prop.*
d *ex* 2. *part. huius prop.*
e *cor.* 8. *huius pr.*
f 31. *VI. Elem.*
g 8. & 17. *VI. El.*
h *cor.* 4. *huius pr.*
Fig. 73. 74.
i *poſt. co.* 2. *pr.* 12.

centur haec duo puncta F, *foci* dictarum Sectionum.

Verticales axis tangentes QE, MO conveniant cum alia tangente MG ad puncta E, O;
ergo rectangulum ex QE in NO, quod ae-
a *pr.* 18. quatur (a) quadrato CB, aequabitur re-
b 16. *VI.* ctangulo QFN, aut NVQ; ideoque (b) e-
Elem. rit EQ ad QF, ut FN ad NO; & EQ ad
QV, ut VN ad NO: [*Recti vero, ſeu*
aequales ſunt anguli EQV, ONV;] unde
junctis EV, OV, & EF, FO erunt trian-
c 6. *VI.* gula EQV, OVN (c) ſimilia; item EQF,
Elem. ONF ſimilia erunt; quare angulus EVQ ae-
d *cor.* 6. quabitur NOV: & quia NOV, cum NVO (d)
pr. 32 complet unum rectum (exiſtente recto an-
I. Elem. gulo ONV in eodem triangulo), erit EVQ
cum NVO recto aequalis; ideoque OVE
e *ex* 13. rectus (e) angulus erit. Similiter ob angulum
I. Elem. QFE aequalem NOF, qui cum NFO (f) re-
f *cor.* 6. ctum complet, etiam angulus EFO eſt re-
pr. 32. *I.* ctus: unde ſemicirculus ſuper diametro EO
Elem. deſcriptus per puncta V, F tranſibit, rectos
g *ex* 31. angulos EVO, EFO (g) comprehendens: &
III. El. per punctum O ducta AO parallela VE, quam
ſecet in I recta VM, erit angulus AOV re-
h 27. *I.* ctus, utpote (h) alterno parallelarum EVO
Elem. aequalis [*in Ellipſi*: *in Hyperbola vero ut-*
i 27. *I.* *pote binos rectos* (i) *cum recto EVO complens*]:
Elem. eſtque AO aequalis OI, quia ordinata MK,
k *cor.* 13. cum ſit QG ad GN, ut QK (k) ad KN, erit etiam
prop. 9. EG ad GO, ut EM ad MO: [*ſed eſt EV ad*
l *cor.* 1. *OA, ut* (l) *EG ad GO, & EV ad IO, ut EM ad MO;*]
prop. 4. quare eſt EV ad OA, ut EV ad IO; unde OA
VI. El. ae-

aequatur IO : Angulus ergo OVI (a) aequabitur OVA in triangulis OVI, OVA aequalibus, & ſimilibus [*ob aequalia latera circa angulos* (b) *rectos, ad punctum O conſtitutos*] : Sed OVA aequatur (c) angulo OEF, quippe eidem arcui OF inſiſtunt in eodem circulo; quare, & angulus OVI aequabitur OEF; & ex puncto H ubi concurrunt VO, EF, iuncta ad M linea HM, erit tangenti EM perpendicularis, quia ob aequales angulos HVM, HEM, circulus (d) per puncta H, V, E, M deſcribi poſſet, exiſtente (e) angulo HME recto, quia oppoſitus eſt angulo recto HVE [*in Ellipſi : in Hyperbola vero in eodem ſegmento eſt cum HVE recto*]; unde & rectus erit HMO; qui cum opponatur alteri recto HFO, etiam (f) per puncta M, H, F, O tranſire poterit circulus; quare (g) angulus VME aequabitur VHE, & angulus FMO (h) aequabitur FHO, cum ſint in eodem circulari ſegmento: ſed VHE (i) eſt aequalis [*in ellipſi*], aut idem cum FHO [*in hyperbola*]; ergo anguli VME, FMO, quos rami, ex focis V, F ad idem Sectionis punctum M ducti cum tangente comprehendunt, ſunt aequales. Q. E. D.

a 4. *I. El.*
b *ex demonſtr.*
c 21. *III. Elem.*
d *ex* 21. *III. El.*
e *ex pr.* 22. *III. El. in Ellipſi, & ex pr.* 21. *III. El. in Hyper.*
f *ex pr.* 22. *III. Elem.*
g 21. *III. Elem.*
h *ex eadem pr.*
i 15. *I. Elem.*

COROLLARIA.

I. HInc radii ex puncto V in perimetrum Sectionis Ellipticae, aut Hyperbolicae NM incidentes, reflectuntur ad aliud punctum F in Ellipſi; aut in Hyperbola ita reflectentur in R, ut in ipſum punctum F ſint col-

collimantes, [*ſeu verſus M producti, tendant ad focum F ; nam*] ob angulum reflexionis RMY aequalem angulo incidentiae VME, adeoque (a) aequalem angulo OMF, ipſi ad verticem oppoſito, [*erunt anguli RMY, RMO aequales angulis OMF, RMO : ſed illi duobus* (b) *rectis aequantur ; ergo & iſti, quare lineae RM, MF in directum* (c) *ſunt poſitae, ideoque radii RM verſus M producti, tendent ad focum F*]. Et viciſſim ex puncto in ſectionem MN incidentes radii, reflectentur in alterum focum V in Ellipſi : at in Hyperbola, ob angulum ZMY (d) aequalem verticaliter oppoſito VME, adeoque (e) & angulo incidentiae FMO, reflectetur FM in MZ, quae collimat in punctum V; Et ideo puncta haec foci appellantur, quippe luminis in uno ipſorum poſiti reflexi radii ab Elliptica curva in aliud reflexi colligentur ; & in Hyperbolica reflexi radii luminis irradiantis ex uno foco imaginem referent in altero. Idem de obiectis per ſpecula Elliptica, aut Hyperbolica videndis intelligi debet.

a *ex hac prop.*
b 13. *I. Elem.*
c 14. *I. Elem.*
d 15. *I. Elem.*
e *per hanc prop.*

II. Determinari poterunt foci Ellipſis, aut Hyperbolae, ſi ſuper quamlibet tangentem OE, verticalibus tangentibus NO, QE interceptam, velut diametrum circulus deſcribatur, axem ſecans in F, & V, quae puncta erunt foci quaeſiti, propter angulos in ſemicirculo rectos OVE, OFE.

III. Item, ſi ex vertice B ſecundarii axis inclinentur hinc inde in Ellipſi ſuper axem tranſverſum rectae BF, & BV, ſingulae aequales ſemiaxi tranſverſo CN, ſeu

CQ,

CQ, erunt puncta F, V ipſi foci: tunc enim rectangulum NFQ, aut QVN, cum quadrato CF, ſeu CV, adaequans (a) quadratum CN, vel BF (b), aut BV, ideſt quadratum BC cum (c) quadrato CF, aut CV, dabit ipſum rectangulum NFQ, aut QVN dicti ſemiaxis ſecundarii BC quadrato aequale, ut contingit in focorum determinatione. a 5. *II. Elem.* b *ex conſtruct.* c 47. *I. Elem.*

IV. In Hyperbola ſi rectae BN, iungenti terminos utriuſque axis, aequalis ponatur ex centro CF, aut CV in axe tranſverſo, erunt puncta F, V foci quaeſiti: Nam rectangulum QFN, quod cum (d) quadrato CN complet quadratum CF, aequabitur (e) quadrato CB, quod cum (f) eodem CN quadrato complet quadratum BN. d 6. *II. Elem.* e *ex conſtruct.*

V. [*Hinc foci F, V a centro C aequidiſtant; nam in Hyperbola rectae CV, CF aequantur eidem* (g) *rectae BN; ergo etiam mutuo ſunt aequales. In Ellipſi vero quia BV, BF aequantur* (h) *eidem rectae CN, utique ipſae, ſicuti & ipſarum quadrata aequari debent: eſt autem quadratum BV aequale* (i) *quadratis BC, CV, & quadratum BF aequale* (k) *quadratis BC, CF; igitur quadrata BC, CV aequantur quadratis BC, CF, & utrinque ablato BC quadrato, erit quadratum CV aequale quadrato CF, ideoque aequabuntur CV, CF.*] f 47. *I. Elem.* g *ex cor.* 4. h *ex cor.* 3. i 47. *I. Elem.* k *per eamdem.*

PROPOSITIO XXI.

SI cuilibet ramo FM, ex foco F ad aliquod punctum M Ellipſeos, aut Hyperbolae ducto, agatur ex centro C parallela Fig. 75. 76.

CI,

CI, cum tangente ME conveniens in I; erit CI aequalis ſemiaxi tranſverſo CQ, aut CN.

Ducta ex alio foco V recta VD parallela iiſdem FM, CI, & tangenti occurrente in D, & iuncta VM, quam ſecat CI in T, ductiſque verticalibus tangentibus QE,
a *pr.* 20. NO; Quoniam angulus VME aequatur (a)
b 27. *I.* MO, ſive (b) VDM ob parallelas huic ae-
Elem. quali, erunt (c) latera VM, VD aequalia,
c 6. *I. El.* utpote angulis aequalibus oppoſita: eſtque
[*ob parallelas VD, CI, FM,*] MI ad ID,
d 2. *VI.* ut (d) MT ad TV, ut FC ad CV, quae
Elem. ſunt (e) aequales; ergo [*aequantur etiam MI,*
e *cor.* 5. *ID, adeoque*] triangulorum MVI, DVI,
pr. 20. latus commune VI habentium, caetera latera MV, VD, nec non MI, ID aequalia
f 8. *I. El.* ſunt; unde (f) & anguli MIV, DIV aequales erunt, adeoque recti: & quia pariter recti ſunt VQE, VNO, circulus circa dia-
g 22. *III.* metrum VE deſcriptus, per puncta (g) Q, I
Elem. tranſibit; & circulus circa diametrum VO,
h *per e-* per puncta (h) N, I pariter ſe conferet.
amdem. Quare angulus QIV (i) aequabitur QEV,
i 21. *III.* quippe ad idem circuli ſegmentum pertine-
Elem. bunt: Sed QEV aequatur OVN, qui pari-
k 21. *III.* ter aequalis (k) erit NIO, cum in eodem cir-
Elem. culi ſegmento, per puncta N, I, V, O tranſeuntis, uterque conſiſtat; ergo angulus QIV aequatur NIO: & ſi alteruter addatur angulo NIV in Ellipſi, vel ab ipſo ſubtrahatur in Hyperbola, fiet angulus QIN aequalis recto VIO. Quare circulus ſuper diame-

me-

metro QN deſcriptus per punctum (a) I tranſi- a 31. *III.*
bit, eritque radius CI aequalis ſemiaxi CQ, *Elem.*
aut CN. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. HInc habetur, quod in Ellipſi ſumma inclinatarum ex focis ad quodlibet punctum curvae, & earum differentia in Hyperbola, aequatur integro axi QN. Nam quia [*FV eſt ad VC, ut* (b) *FM ad CT*, *&*] FV eſt dupla (c) VC, erit FM dupla CT; & cum ſit quoque [*DM ad MI, ut* (d) *VD ad TI, ſitque*] DM (e) dupla MI, erit VD, ſive (f) ipſi aequalis VM dupla TI: quare FM, & VM in Ellipſi eſt dupla CT, cum TI, hoc eſt dupla GI, vel CQ, adeoque aequalis QN. In Hyperbola vero differentia VM ab MF eſt [*differentia duplae TI a dupla TC, ſeu*] dupla differentiae TI a CT, hoc eſt dupla CI, ſeu CQ, & propterea aequalis axi tranſverſo QN.

b *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
c *cor.* 5. *pr.* 20.
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e *ex demonſtr. huius pr.*
f *ex demonſtr. huius pr.*

II. Rurſus ſi per centrum C agatur tangenti parallela CP, utrumque ramum ſecans in P, R, erunt MP, MR eidem ſemiaxi CN aequales. Nam in parallelogrammo CIMP (g) eſt utique MP aequalis CI: & ducta etiam CS parallela ramo VM, reſultabit quoque CS (h) aequalis ſemiaxi; & in parallelogrammo RCSM erit (i) quoque CS aequalis MR; unde utraque MP, aut MR, aequatur ſemiaxi CN.

g 34. *I. Elem.*
h *ex hac prop.*
i 34. *I. Elem.*
k *in hac prop.*

III. Quoniam oſtenſa (k) eſt CI, aut CS, aequalis CN, & iuncta VI ſit (l) perpendicu-

l *per eamdem.*

cularis tangenti, quemadmodum eidem fc[illegible] ret (a) perpendicularis FS; colligitur, quo l ſi circa diametrum QN circulus deſcribatur ad quem terminabunt illae lineae CI, C[illegible] aequales CN, eiuſque peripheria ſecetur [illegible] qualibet tangente MG in punctis I, S, iun[illegible] ctae CI, CS evadent parallelae ramis a[illegible] contactum ductis FM, VM, utpote aequales ſemiaxi (nec enim tales parallelae poſſunt occurrere tangenti extra peripheriam circuli, quia alias non forent aequales ſemiaxi), & factis angulis rectis GIV, GSF, illae perpendiculares IV, SF ad focos in axe determinandos ſe extendent: Vnde patet modus alius determinandi focos harum Sectionum.

a *per eamdem.*

IV. Ductae ex focis F, V in aliquam tangentem GM perpendiculares FS, VI continent rectangulum aequale quadrato ſemiaxis ſecundarii CB, nempe rectangulo (b) NFQ, aut NO in QE. Nam extenſa SF ad circulum in X, iuncta XC erit in directum alteri radio CI; nam ob angulum rectum ISX, eſt arcus XSI (c) ſemiperipheria aequalis ſemiperipheriae QIN; & ablato communi [*arcu*] NI, eſt arcus XN aequalis QI, & (d) angulus XCN aequalis QCI, circa quos angulos, cum latera XC, CF lateribus CI, CV ſint aequalia, etiam baſis FX (e) aequatur baſi VI, unde rectangulum FS in VI aequatur rectangulo SFX, adeoque etiam (f) rectangulo NFQ.

b *pr.* 20.

c 31. *III. Elem.*

d 21. *III. Elem.*

e 4. *I. El.*

f 35. *III. El. in Ellip.*, & *cor.* 1. *pr.* 36. *III. Elem. in Hyperb.*

V. ducta ad tangentem perpendiculari MH, erit harmonice ſectus axis ab utroque foco, a perpendiculari, & tangente; nempe

pe erit (a) FH ad HV, ut FG ad GV. Nam concurrente FS cum MV in Z, ob angulos (b) rectos FSM, MSZ aequales, atque FMS, SMZ (qui aequatur (c) VME) pariter (d) aequales, lateri MS communi triangulorum MSF, MSZ adiacentes, erunt (e) & latera FS, SZ aequalia: unde FS ad VI eſt, ut SZ ad VI; ſed prima ratio eadem eſt cum (f) ratione FG ad GV, ſecunda (g) cum altera SM ad MI, ſive FH ad HV; ergo eſt FG ad GV, ut FH ad HV.

a *ex* 4. *def. ſec.* b *per bini prop.* c *ex* 15. *I. Elem.* d *ex pr.* 20. e 26. *I. Elem.* f *ex pr.* 4. *VI. El.*

VI. Quadrata autem FS, VI, & IS erunt ſemper eidem quantitati aequalia, nempe quadratis NV, & VQ, ſive NF, & FQ. Nam iuncta FI, erunt quadrata FS, SI aequalia (h) quadrato FI; ergo addito VI quadrato, ſunt quadrata FS, VI, & IS quadratis VI, & IF aequalia: haec autem ex ſupradictis (i) ſunt aequalia duplo quadrati IC biſecantis baſim VF trianguli VIF, cum duplo [*quadrati*] ſemibaſis CV; & duplum quadrati CI, ſive CQ una cum duplo CV quadrati aequatur binis quadratis (k) inaequalium partium VQ, FQ, ſive VQ, VN, aut ipſis NF, NV, ſive NF, FQ quadratis; ergo quadrata FS, VI, & IS, hiſce quadratis aequantur, ideoque ſunt ſemper eiusdem quantitatis.

g *per eamdem.* h 47. *I. Elem.* i *in Schl. gener. num. V.* k 10. *II. El. in Ellip.* & 9. *II. El. in Hyper.*

PROPOSITIO XXII.

IN Hyperbola ſumma angulorum MFB, MVB, quos rectae ex utroque foco ad bina curvae puncta inclinatae, continent; in

Fig. 77. 78.

Ellipſi vero eorum differentia dupla eſt anguli MLB a tangentibus eorumdem punctorum comprehenſi.

a *pr.* 32. *I Elem.* b *ex pr.* 20. b *pr.* 32 *I. Elem.* d 15. *I. Elem.* e *ex pr.* 32. *I. El.* f *per pr.* 20. g 1. *part. pr.* 32. *I. Elem.* h *per eamdem.* i 15. *I. Elem.* k *pr.* 32. *I. Elem.*

Angulus enim MFK externus aequatur (a) internis angulis MVF, FMV; ergo MFK cum MVF aequatur duplo MVF cum ipſo FMV, qui pariter duplus (b) eſt auguli VMG; ergo MFK cum MVF duplus evadit anguli MGF, qui (c) aequatur ipſis MVF, VMG. Eodem modo probabitur angulus BFK, cum BVF duplus anguli BHF; quare totus angulus MFB, cum toto MVB aequabitur duplo anguli MGF; ſive (d) HGL, cùm duplo BHF, ſive GHL, quibus aequatur duplus anguli externi (e) MLB, a tangentibus comprehenſi. In Ellipſi vero quia angulus GMF, ſive (f) VMI, aequatur (g) MGV cum MVF; ergo addito utrinque MGV, erunt anguli GMF, MGV, ideſt externus (h) MFV, aequales MVF cum duplo MGV: eodemque modo externus BFV aequabitur BVF cum duplo BHF, ſive duplo (i) LHG: quare totus angulus MFB aequatur toti MVB cum duplo MLB, qui (k) ipſis MCV & LHG aequatur: Igitur exceſſus anguli MFB ſupra MVB eſt aequalis duplo anguli MLB a tangentibus comprehenſi. Q. E. D.

COROLLARIUM.

Recta MFT per focum traducta, & ductis tangentibus MF, TE convenientibus in E, erit angulus MET in Hyperbola ſemper obtuſus, in Ellipſi ſemper acutus; nam anguli

li a ramis MF, TF ad focum F directe convenientibus, [*& a recta FK in Hyperbola, vel FV in Ellipſi*] contenti, ſunt duobus (a) rectis aequales; unde medietas anguli MFT, [*ſeu potius angulorum MFK, KFT in Hyperbola, vel MFV, VMT in Ellipſi*] eſt rectus, quare eius ſumma cum medietate anguli MVT maior eſt recto, eiuſque exceſſus ſupra medietatem MVT eſt minor recto: quare angulus MET aequalis ſummae ex dimidio MFT, & dimidio MVT erit in Hyperbola obtuſus; & in Ellipſi, cum ſit MET aequalis differentiae dictarum medietatum, erit acutus. a per 13. I. Elem.

PROPOSITIO XXIII.

DIſtantia focorum FV eſt media proportionalis inter latus tranſverſum QN, & QG ſummam tranſverſi, & recti NH in Hyperbola, eorumve differentiam in Ellipſi. Fig. 79. 80.

Quia enim rectangulum QFN aequatur (b) quadrato ſemiaxis coniugati CB, ſive quartae parti rectanguli ex tranſverſo, & recto QNH, ſeu QNG, poſita NG aequali NH; utrovis addito in Hyperbola [*ad ſemiaxis tranſverſi CN quadratum*], & ſubtracto in Ellipſi a ſemiaxis tranſverſi CN quadrato, reſultat (c) CF quadratum aequale aggregato quadrati CN, & quartae partis QNG in Hyperbola, eorumque differentiae in Ellipſi: & quadruplicando terminos, erit quadratum diſtantiae focorum FV aequale ſummae quadrati QN, & rectanguli QNG in Hyperbola, b ex pr. 20. c 6. II. Elem. in Hyperb. & 5. II. El. in Ellipſi.

 ideſt

a 3. *II.* *Elem.* ideſt (a) rectangulo NQG; in Ellipſi autem [*idem FV quadratum aequabitur*] eorumdem differentiae, quae pariter (b) eſt NQG rectangulum. Ergo VF diſtantia focorum eſt media (c) proportionalis inter axem tranſverſum QN, & QG, quae ſumma eſt in Hyperbola, in Ellipſi vero differentia eiuſdem tranſverſi lateris QN a recto NH, ſeu NG. Q. E. D.

b 2. *II.* *Elem.*

c 17. *VI.* *Elem.*

COROLLARIVM.

d *poſt co.* 2. *pr.* 12.

QVoniam quadratum axis coniugati AB aequatur (d) rectangulo QNH, ſive QNG, & quadratum diſtantiae focorum FV aequale oſtenſum eſt rectangulo NQG; erit quadratum AB ad quadratum VF, ut QNG ad NQG, ideſt ut (e) rectum latus NG ad QG ſummam tranſverſi lateris, & recti in Hyperbola, & eorum differentiam in Ellipſi: eodemque modo, [*ſeu in eadem ratione*] erit quoque quadratum ſemiaxis coniugati CB ad quadratum diſtantiae foci a centro CF, aut CV.

e 1. *VI.* *Elem.*

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 81. 82.

IN Hyperbola, & Ellipſi ex quolibet puncto R ducta tangente RG concurrente cum binis diametris coniugatis CN, CA in punctis G, M, erit rectangulum GRM aequale quartae parti rectanguli ex tranſverſa diametro RCS, per contactum ducta, in eius parametrum, ſive aequale quadrato ſemidiame-

metri CH parallelae tangenti, quae eſt co- a *cor.* 5.
niugata ad diametrum RCS. *prop.*18.
b 15. *VI.*

Ducatur enim tangens HK eidem Ellipſi, *Elem.*
vel ad coniugatam Hyperbolam, & ordinen- c 34. *I.*
tur HF, RE ad diametrum AB, item HI, *Elem.*
RO ad NQ, nec non AL ad CH, & AD ad d *cor.* 5.
CR. Cum ſit CH ad CL, ut CK ad CA, ſi- *pr.* 18.
ve ut (a) CA ad CF, erit (b) triangulum e 15. *VI.*
HCF aequale ACL; unde etiam (c) HCI ae- *Elem.*
quabitur ADC. Similiter autem erit RC ad f 34. *I.*
CD, ut MC ad CA, ſive ut (d) CA ad CE, *Elem.*
& triangulum ADC [*in Ellipſi*] aequa- g *ex cor.*
bitur (e) RCE, vel (f) RCO: [*in Hyper-* 5.*pr.*18.
bola vero, cum ſit MC (g) *ad CA, ut CA ad* h 1. *VI.*
CE, erit MC ad CE, ſeu triangulum (h) *MRC* *Elem.*
ad RCE, in (i) *ratione duplicata MC ad* i *def.* 10.
CA, vel ut (k) *idem triangulum MRC ad ſi-* *V. El.*
mile ADC; unde etiam triangulum ADC (l) k 19. *VI.*
aequabitur RCE, vel RCO]: ergo triangu- *Elem.*
la HCI, RCO aequantur; eſtque GOR ad l 9. *V.*
RCO, ut (m) GO ad OC, hoc eſt ut (n) GR ad *Elem.*
RM, ſive ut CE (o) ad EM, Aut ut (p) triangu- m 1. *VI.*
lum REC ad RME; ergo GRO triangulum *Elem.*
ad HCI, aequale RCO erit, ut idem CHI, n 2. *VI.*
quod aequatur RCE, ſive ADC, ad RME: *Elem.*
ſuntque GRO, HCI, RME triangula ſimilia, o *per e-*
quorum homologa latera GR, CH, RM e- *amdem.*
runt (q) proportionalia: ideoque rectangulum p 1. *VI.*
GRM aequatur (r) quadrato ſemidiametri CH, *Elem.*
ſeu quartae parti rectanguli ex diametro q *ex* 19.
tranſverſa RS in ſuum latus rectum. Q. E. D. *VI. El.*
r 17. *VI.*
Elem.

COROLLARIA.

I. Circulo circa triangulum CMG circumſcripto, cuius circumferentiam ſecet CR in P, erit RP medietas lateris recti ad diametrum RCS pertinentis; Quia rectangulum GRM aequabitur (a) CRP rectangulo, unde CRP erit quarta (b) pars rectanguli ex RCS in ſuum latus rectum, adeoque ex ſemidiametro RC in medietatem recti lateris, quae erit PR.

a 35. III. El. in Ellip., & in Hyperb. corol. 1. prop. 36. III. El.

b per hanc prop.

II. Si circulus hic in figura hyperbolica non ſecaret, ſed tangeret ſemidiametrum CR, coincidente puncto P cum C, unde PR aequalis eſſet CR; foret hyperbola (c) aequilatera, ob medietatem lateris recti aequalem medietati tranſverſae diametri.

c ex cor. 7. pr. 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 83. 84.

INclinatae ex focis F, V ad quodvis punctum R curvae Ellipticae, aut Hyperbolicae, continent rectangulum VRF aequale quadrato ſemidiametri CH coniugatae diametro RCS per punctum R ductae, ſive quartae parti rectanguli ſub tranſverſo RS, & eius recto latere contenti.

Ducta enim tangente RG concurrente cum axe NQ in G, & cum axe altero coniugato AB in M; ductaque ex centro CI parallela VR [*quae conveniat cum tangente GM*] in I, iuncta IF erit ipſi tangenti (d) perpen-

d ex dem. prop. 21.

pendicularis: [*eſt vero etiam axis coniugatus AB perpendicularis tranſverſo axi* NQ:] quare ob angulos rectos MIF, MCI, tranſiret circulus per puncta M, I, F, C, ſuper diametro (a) FM deſcriptus; adeoque (b) rectangula IGC, IGM erunt aequalia, unde FG ad GM erit, ut (c) IG ad GC, ſive ut RG ad GV ob parallelas CI, VR; ergo FGV (d) aequabitur MGR; unde etiam per puncta V, R, M, F tranſire poterit (e) circulus, unde angulus FMR aequabitur GVR (eſſent enim in figura 84. in eodem ſegmento, & in figura 83. uterque cum FVR illi oppoſito, huic conſequenti, duos rectos (f) compleret): ſed & angulus FRM aequatur (g) VRG; ergo triangula FMR, GVR aequiangula ſunt, & (h) ſimilia, ideoque FR ad RM erit, ut (i) GR ad RV; & rectangulum VRF aequabitur (k) GRM: ſed hoc (l) aequatur quadrato ſemidiametri coniugatae CH, quae tangenti aequidiſtat, ſeu quartae parti figurae ex tranſverſo RS, & eius parametro contentae; ergo etiam illud rectangulum VRF ipſi aequatur. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. Hinc VR (m) eſt ad ſemidiametrum RC, ut medietas parametri ad hanc diametrum pertinentis, ad RF, quia rectangulum VRF aequatur RC in ſemiparametrum; id enim eſt quarta pars rectanguli totius diametri RS in totam parametrum.

II. Ex terminis diametri RS iunctae ad focum RF, SF pariter continebunt rectangu-

a *ex* 21. *III. El.*
b *ex cor.* 1.36.*III. Elem.*
c 16.*VI. Elem.*
d 16.*VI. Elem.*
e *ex cor.* 1. *prop.* 36. *III. Elem. in Ellip.*, & *ex*35.*III. El.inHyperb.*
f 22. *III. El.*,& 13. *I. El.*
g *pr.* 20.
h 4. *VI. Elem.*
i *per eamd. pr.*
k 16.*VI. Elem.*
l *propoſ. praec.*
m 16.*VI. Elem.*

lum RFS aequale quadrato ſemidiametri coniugatae CH, ſeu quartae parti figurae rectanguli ex ipſa diametro RS in ſuam parametrum: quippe FS(a) aequatur VR, cum ſint baſes triangulorum FCS, RCV aequalia latera FC, CV, & SC, CR circa aequales angulos ad verticem C habentium; Vnde RFS aequatur VRF.

a *pr.* 4. *I. Elem.*

III. Quadrata RF, & RV cum duplo quadrato coniugatae ſemidiametri CH, aequantur quadrato QN in Ellipſi; in Hyperbola vero eadem quadrata RF, & RV dempto duplo quadrato ſemidiametri coniugatae CH, eidem quadrato axis QN aequantur. Nam QN aequatur aggregato (b) ipſarum RF, & RV in Ellipſi, in Hyperbola vero aequatur earumdem differentiae; ergo quadratum QN aequatur ipſarum quadratis, addito in Ellipſi, & dempto in Hyperbola, duplici rectangulo ipſarum, quod idem eſt, ac duplum quadratum CH; [*quippe in Ellipſi quadratum QN, vel quadratum ſummae rectarum FR, RV, eſt aequale* (c) *quadratis partium FR, RV plus duplo rectanguli ex iiſdem partibus FRV, ſeu aequatur quadratis FR, RV plus* (d) *duplo CH quadrati: in Hyperbola vero ſumpta RO aequali RV, ut* (e) *ſit FO par tranſverſo axi QN, quadrata FR, RO, vel FR, RV ſimul ſumpta aequantur* (f) *quadrato FO, plus duplo rectanguli FRO; quare hoc duplo rectanguli FRO utrinque ablato, quadrata FR, RO, vel FR, RV ſimul ſumpta, minus duplo rectanguli FRO, vel FRV aequabuntur quadrato FO, vel QN.*]

b *cor.* 1. *pr.* 21.
c 4. *II. Elem.*
d *per hanc prop.*
e *cor.* 1. *pr.* 21.
f 7. *II. Elem.*

IV. Rur-

IV. Rurſus in Ellipſi ſumma ex rectangulo quolibet VRF, & ex quadrato ſuae ſemidiametri tranſverſae CR, in Hyperbola vero eorum differentia, ſemper eiuſdem eſt quantitatis, nempe aequatur duplo quadrato ſemiaxis tranſverſi CN, ablato quadrato diſtantiae foci a centro CV, vel CF. Nam vidimus eſſe QN quadratum aequale quadrato ſummae in Ellipſi, vel differentiae in Hyperbola, rectarum VR, FR, ideſt quadratis VR, & FR plus, vel minus duplo rectangulo VRF; At quadrata VR, & FR dupla ſunt quadrati CR, & quadrati CV (a); ergo duplum quadrati CR cum duplo quadrati CV, plus, aut minus duplo rectangulo VRF, aequatur quadrato QN; & omnia dimidiando, quadratum CR cum quadrato CV, addito, aut dempto rectangulo VRF, aequatur dimidio quadrati QN, quod eſt duplum quadrati ſemiaxis CQ: quare hinc inde ablato quadrato CV, erit [*quadratum CR cum rectangulo VRF in Ellipſi, aut minus rectangulo VRF in Hyperbola, aequale duplo quadrati CQ minus quadrato CV, ſeu erit*] ſumma, vel differentia quadrati CR, & rectanguli VRF, aequalis differentiae dupli quadrati CQ ab ipſo CV, vel CF quadrato.

a *ex Sch. general. num. V.*

V. Et quia rectangulum VRF aequatur (b) quadrato coniugatae ſemidiametri CH, erit in Ellipſi ſumma quadratorum CR, & CH, in Hyperbola vero eorum differentiae, aequalis ſummae, aut differentiae quadratorum ex utroque ſemiaxe CQ, & CB. Nam pariter ſumma, aut differentia quadratorum CR,

b *ex hac prop.*

CH

a *ex cor. praeced.* CH aequabitur duplo (a) CQ quadrati, dempto quadrato CV: ſed quadratum CQ dempto quadrato CV in Ellipſi (b) aequatur rectangulo QVN, ſeu (c) quadrato ſemiaxis CB; & in Hyperbola CV quadratum, dempto QVN, ſeu (d) CB quadrato aequatur (e) quadrato CQ, [*hoc eſt CV quadratum aequale eſt quadratis CB, CQ*]; ergo in Ellipſi [*duplum quadrati CQ, dempto CV quadrato, hoc eſt*] CR quadratum cum CH quadrato, aequabitur quadratis CQ, & CB; in Hyperbola vero [*duplum quadrati CQ, dempto CV quadrato, ſeu*] differentia quadratorum CR, & CH, aequabitur [*duplo quadrati CQ, demptis quadratis CB, CQ, ſeu aequabitur quadrato CQ, dempto CB quadrato, vel*] differentiae quadratorum CQ, & CB.

b *ex pr. 5. II. F-* c *pr. 20.* d *ex eadem pr.* e *ex pr. 6. II. El.*

VI. Hinc quadruplicatis terminis, axium QN, & AB quadrata ſimul ſumpta in Ellipſi aequantur quadratis quarumlibet coniugatarum diametrorum RS, & HT; & in Hyperbola quadratorum ex axibus differentia aequalis erit differentiae quorumvis quadratorum ex diametris coniugatis.

VII. Vnde Hyperbola aequilatera, cuius axis tranſverſus (f) aequatur parametro, & habet axem coniugatum, conſequenter ſibi aequalem ob proportionalitatem (g) harum trium linearum, [*nempe tranſverſi axis, coniugati, atque parametri*,] habebit quaslibet alias tranſverſas diametros ſuis coniugatis aequales, cum parametris iisdem aequalibus: Nam ubi aequalis eſt differentia quadratorum ex axibus, & ex binis coniugatis dia-

f *cor. 7. prop. 5.* g *poſt cor. 2. pr. 12.*

diametris, ſi in illis eſt nulla, pariter in his nulla eſſe poteſt.

PROPOSITIO XXVI.

IN Ellipſi, & Hyperbola quaelibet diameter HT eſt media proportionalis inter axem tranſverſum NQ, & rectam ipſi HT parallelam RS per aliquem focum F traductam. Fig. 85. 86.

Ducta enim tangente RG, & ex alio foco V iisdem HT, RS parallela VD, [*quae producta ſecet in X diametrum KCM, cui ordinatur RS,*] iungatur RD, quae [*ob RE ad ED, ut FC ad CV,*] biſariam ſecabitur in E a diametro HT, cui eſt ordinata, ſicut FV biſariam (a) diviſa eſt in centro C ab eadem diametro ipſis FR, VD parallela: [*iam vero ob FO parallelam VX, eſt FO ad XV, ut* (b) *OC ad CX, ut FC ad CV; ergo ſicuti aequantur FC, CV* (c), *etiam aequari debent FO, XV, itemque OC, CX; unde parallelae RO, DX in pari a centro diſtantia ordinantur diametro KCM, quae idcirco invicem* (d) *aequabuntur, adeoque aequales etiam, &* (e) *parallelae erunt illas iungentes XO, DR: harum autem rectarum medietates ſunt XC, DE, itemque CO, ER; ergo hae quoque aequales erunt, & mutuo parallelae, quas cum iungant XD, CE, OR, ſequitur, has quoque aequales* (f) *eſſe, & mutuo parallelas. Itaque FO, quae eſt differentia FR ab OR, eſt etiam differentia FR a CE; ſicuti XV, quae differentia eſt XD ab*

a cor. 5. prop. 20.
b 4. VI. Elem.
c cor. 5. prop. 20.
d pr. 5. & 6.
e 33. I. Elem.
f ex eadem pr.

ab VD, erit quoque differentia CE ab VD: ſed FO oſtenſa eſt aequalis XV; ergo etiam differentia FR a CE aequabitur differentiae CE ab VD;] erit ergo CE media arithmetica inter ipſas FR, VD, ſive inter FR, & FS, quae ipſi VD aequatur, nam in pari a centro diſtantia utraque ad curvam inclina-
a 15. *I.* tur aequali angulo NFS, aut (a) RFQ, & (b)
Elem. QVD; quare dupla CE, quae eſt media,
b 27. *I.* aequatur ſummae extremarum RS: at CH
Elem. eſt media geometrica inter CE, & CG (c),
c *cor.* 5. ipſaque CG parallela FR, aequatur ſemiaxi
pr. 18. tranſverſo CN (d); ergo ſunt quoque proportio-
d *ex pr.* nales RS dupla CE, HT dupla CH, & QN
21. dupla CG; Unde patet propoſitum.

COROLLARIA.

e 17. *VI.* I. QVadratum (e) igitur diametri HT ae-
Elem. quatur rectangulo ex recta ipſi parallela RS per focum ducta, & ex axe tranſverſo QN.

II. Unde ſi plures lineae [*ZP*, *SR*] per focum traducantur, [*ſintque ipſis aequidiſtantes diametri BL*, *TH*; *erit ZP in QN*
f 1. *VI.* *ad SR in QN*, *vel ZP* (f) *ad SR*, *ut* (g) *qua-*
Elem. *dratum BL ad quadratum TH*; *unde*] erunt
g *ex cor.* ſingulae, [*ZP*, *SR*] ut quadrata diametro-
1. rum [*BL*, *TH*,] ipſis aequidiſtantium.

III. Eſt SR ad MA latus rectum ſuae diametri MK, cui ordinatur, ut ipſa dia-
h *cor.* 8. meter MK ad axem tranſverſum NQ: nam
prop. 13. HT quadratum (h) aequatur AMK; ſed & ae-
i *ex hu.* quatur (i) RS in QN, ergo AMK eſt aequa-
prop. le

le RS in QN, & ideo eſt RS ad AM, ut (a) MK ad QN. a 16. VI. Elem.

IV. Cum RS a diametro MK bifariam ſecta ſit in O, erit OR quadratum [*ad rectangulum KOM, ut* (b) *parameter AM ad tranſverſum latus MK, vel ut* (c) *rectangulum AMK ad quadratum MK: ſed rectangulo AMK aequale eſt* (d) *quadratum diametri coniugatae HT; igitur OR quadratum erit ad rectangulum KOM, ut quadratum HT ad quadratum MK, vel ut quadratum HC ad MC quadratum, adeoque permutando, erit OR quadratum*] ad quadratum HC, ut rectangulum KOM ad quadratum MC; & cum ſint RS, HT, NQ (e) proportionales, adeoque & earum dimidiae OR, CH, CN, erit OR quadratum ad quadratum CH, ut (f) CH quadratum ad quadratum CN, ideoque rectangulum KOM ad quadratum MC, ut quadratum HC, ſive ut rectangulum VMF huic (g) aequale ad quadratum CN.

b *ex cor. 6. prop. 5. & 6.* c 1. *VI. Elem.* d *cor.* 8. *pr.* 13. e *ex hac prop.* f *ex* 22. *VI. El.* g *ex pro. praeced.*

V. Et permutando erunt rectangula KOM, VMF, ut quadrata ſemidiametri CM, & ſemiaxis CN, ſive ut integrorum MK, NQ quadrata.

VI. Rectangula NFQ, SFR, cum ſint, ut QN quadratum ad HT quadratum (h), [*ſeu ut QN quadratum ad* (i) *rectangulum QN in SR*] erunt, (k) ut QN, SR; & ſemper rectangula [*ZFP, SFR*] ex portionibus linearum [*ZP, SR*] per focos traiectarum erunt, ut ipſaemet integrae lineae; [*nam rectangulum ZFP eſt ad rectangulum SFR, ut CB quadratum ad* (l) *quadratum CT, vel ut*

h *cor.* 4. *prop.* 18. i *cor.* 1. k 1. *VI. Elem.* l *cor.* 3. *prop.* 18.

ut quadratum BL ad quadratum TH: ſed etiam ZP eſt ad SR, ut quadratum BL ad
a ex cor. 2. *quadratum TH* (a); *ergo rectangulum ZFP eſt ad rectangulum SFR, ut ZP ad SR.*]

VII. FM erit ad quartam partem parametri MA pertinentis ad diametrum MK, ut eadem diameter MK ad aliam MV ex al-
b ex pr. praeced. tero foco inclinatam; quippe VMF (b) ae-
c poſt co. 2. pr. 12. quale CH quadrato, aequatur (c) MK in quartam partem ſui parametri.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 87. 88. SUmma inclinatarum ex focis ad idem punctum Hyperbolae, earumque differentia in Ellipſi, nempe FR, plus, aut minus VR eſt ad CO diſtantiam ordinatae RO a centro, ut focorum diſtantia VF ad ſemiaxem tranſverſum CN.

Nam tangenti TRG ductis ex foco F, & ex centro C parallelis FH, CM, concurrentibus cum VR in H, M, ductaque CI parallela VR, atque ordinata ad axem RO;
d pr. 20. ob angulos FRI, VRT (d) aequales, etiam
e 27. I. Elem. RFH, RHF aequales (e) erunt; quare HR (f) aequatur RF: unde VH erit ſumma
f 6. I. Elem. in Hyperbola, & differentia in Ellipſi, dictarum inclinatarum FR, VR; eſtque VH ad VF, ut VR ad VG, ſive ut CI aequa-
g pr. 21. lis (g) CN, ad CG, vel ut (h) CO ad CN
h cor. 11. prop. 9. (quia CO, CN, CG ſunt proportionales); ergo VH ad VF eſt, ut CO ad CN, & permutando, VH ſumma, vel differentia incli-

na-

natarum a focis, eſt ad CO diſtantiam ordinatae RO a centro, ut diſtantia focorum VF ad ſemiaxem CN. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. HInc ſummae, aut differentiae inclinatarum ex focis [*VR*, *RF*, & *VB*, *BF*] ad varia puncta [*R*, & *B*] curvae hyperbolicae, aut ellipticae, ſunt ut diſtantiae ordinatarum a centro [*CO*, *CK*] cum ſint illae [*inclinatarum ſummae*, *aut differentiae*] ad has diſtantias in eadem (a) conſtanti ratione VF ad CN. a *ex hac prop.*

II. Vnde ſi inclinandae ſint ex focis ad diverſa curvae Hyperbolicae, aut Ellipticae puncta, lineae [*VR*, *FR*, & *VB*, *FB*], quarum ſummae, aut differentiae ſint in aliqua data ratione, acceptis in tali ratione diſtantiis a centro [*CO*, *CK*], & ordinatis ad axem rectis [*OR*, *KB*], inclinatae ex focis ad harum ordinatarum terminos, ſatisfacient quaeſito.

PROPOSITIO XXVIII.

IN omni Sectione Conica ordinata ex foco ad axem FM, ductiſque tangentibus MG, NO, erit ipſa FM medietas lateris recti, & NO aequalis NF. Fig. 89. 90. 91.

Eſto NX latus rectum, erit (b) in Parabola NF eius quadrans, [*ſeu NX quadrupla erit NF*]: eſtque FM media proportio- b *pr.* 19.

na-

nalis inter abſciſſam NF , & ipſum NX [*ſeu inter NF , & quadruplam NF*], MF quadratum (a) aequale FNX ; ergo FM eſt [*dupla NF , ſeu*] medietas eiusdem parametri NX; nam inter 1. & 4. mediat 2. Quia vero etiam GF (b) dupla eſt FN, eſt utique GF aequalis FM , quae eiusdem FN eſt (c) dupla , [*cumque ſit GF ad FM , ut NG ad NO , eſt*] etiam NG aequalis NO : unde NF aequalis GN , aequatur NO.

In aliis autem ſectionibus rectangulum QFN ad quadratum MF eſt , ut tranſverſum (d) latus QN ad rectum NX, ſive ut (e) QNX rectangulum ad NX quadratum ; & permutando QFN ad QNX, ut quadratum MF ad NX quadratum ; Sed primum (f) eſt quarta pars ſecundi ; ergo & (g) tertium eſt quarta pars quarti ; adeoque MF eſt medietas NX , ut illius quadratum ſit quarta pars huius . Quia vero QFN eſt pars (h) quarta QNX, aequabitur rectangulo ex medietate tranſverſi, nempe CN in parametri medietatem MF : quare cum ſit QFN aequale etiam rectangulo CFG (i) ; erit CN in MF aequale ipſi CFG ; unde CF ad CN , ſive (k) CN ad CG erit , ut MF ad FG , ſcilicet ut ON ad NG ; ſed etiam FN ad NG eſt in eadem ratione CF ad CN , aut CN ad CG , quia dividendo , etiam terminorum [*continue proportionalium CF , CN , CG*] differentiae [*FN , NG*] ſunt , ut ipſi termini proportionales , [*nempe ut CF ad CN , vel ut CN ad CG*] ; ergo ON eſt aequalis (l) FN , cum ad NG utraque habeat eamdem rationem. Q. E. D.

a *cor.* 1. *prop.* 4.
b *cor.* 6. *pr.* 9.
c *ex demonſtr.*
d *cor.* 6. *prop.* 5., *&* 6.
e 1. *VI. Elem.*
f *ex pr.* 20.
g 14. *V. Elem.*
h *ex pro.* 20.
i *cor.* 9. *prop.* 9.
k *cor.* 11. *pr.* 9.
l *ex pr.* 9. *V. El.*

CO-

COROLLARIA.

I. IN Parabola GF aequatur (a) FM, in aliis autem Sectionibus inaequalis eſt, in ratione tamen GN ad NO, ſive (b) ad NF huic aequalem; eſtque GN ad NF, ut GQ ad QF (c), quia ſecatur harmonice diameter ab ordinatae, & tangentis occurſu cum ſuis terminis; ergo GF ad FM eſt etiam, ut GQ ad QF. a *ex demoſtrat. huius pr.* b *ex hac prop.* c *cor.* 12. *pr.* 9.

II. Et quia in Hyperbola GQ eſt minor QF, in Ellipſi vero illa maior iſta, ideo GF ſemper minor eſt in Hyperbola ordinata FM, in Ellipſi vero maior.

III. Iuncta FO, erit angulus NFO ſemirectus (d), ob latus NF aequale ipſi NO, [*& rectum angulum FNO.*] d *cor.* 11. *pr.* 32. *I. El.*

IV. [*Hinc ſicuti FN eſt aequalis NO, ita & FQ aequari debet QE; nam quadratum ſemiaxis, tranſverſo NQ coniugati aequatur tam rectangulo* (e) *QE in NO, quam* (f) *rectangulo QFN; igitur rectangulum QE in NO aequabitur rectangulo QFN, eritque* (g) *proinde FQ ad QE, ut NO ad FN: ſed NO aequatur FN; ergo etiam FQ aequari debet QE.*] Fig. 90. 91. e *ex pr.* 18. f *ex pr.* 20. g 16. *VI. Elem.*

PROPOSITIO XXIX.

ISdem poſitis: ordinata ad axem quavis alia TBH, ſecante tangentem GM in A, iuncta ex foco ad curvam recta FH erit aequalis BA. Fig. 89. 90. 91.

Rectangulum enim TAH ad quadratum tangentis AM eſt, ut quadratum NO ad quadratum OM; ſed NO aequatur NF (a); ergo eſt etiam ut quadratum NF ad quadratum OM, vel ut quadratum FB ad quadratum AM, ita rectangulum TAH ad idem quadratum AM; quare (b) illud rectangulum aequatur FB quadrato; & utrinque addito quadrato BH, erit TAH rectangulum, cum quadrato BH aequale utrique ſimul ſumpto quadrato FB, & BH; ideſt quadratum BA (c) aequabitur quadrato (d) FH: ergo ramus ex foco FH aequatur ipſi BA ordinatae, ad tangentem GM extenſae. Q. E. D.

a ex praeced. pr.
b 9. V. Elem.
c 6. II. Elem.
d 47. I. Elem.

[*Scholium.*]

Fig. 91. [*Eodem ferme ratiocinio liquet, ramum etiam Fb, ductum ex foco F unius Hyperbolae TNH ad perimetrum alterius oppoſitae bQt, aequari ordinatae ba, ad tangentem aM extenſae; nam ob parallelas FM, EQ, ab, eſt FG ad MG, ut* (e) *GQ ad GE, ut* (f) *Qb ad Ea, ideoque ſumma antecedentium Fb eſt ad conſequentium ſummam aM, ut* (g) *unum antecedens FG ad ſuum conſequens MG, vel ut alterum antecedens GQ ad ſuum conſequens GE, vel denuo ut horum antecedentium* (h) *ſumma FQ ad ſummam ſuorum conſequentium ME; itaque eſt Fb ad aM, ut FQ ad ME: ſed FQ eſt aequalis QE* (i); *ergo eſt quoque Fb ad aM, ut QE ad ME, & Fb quadratum ad quadratum aM, ut* qua-

e ex 4. VI. El.
f ex 2. VI. El.
g ex 12. V. Elem.
h per eamdem.
i cor. 4. pr. praeced.

quadratum QE ad quadratum ME : ſed etiam rectangulum t a b eſt ad quadratum tangentis a M, ut quadratum QE ad (a) *quadratum ME; ergo quadratum F b eſt ad quadratum a M, ut rectangulum t a b ad idem quadratum a M; quare F b quadratum aequatur rectangulo t a b; & utrinque addito quadrato b h, erit t a b rectangulum, cum quadrato b b aequale utrique ſimul ſumpto quadrato F b, & b h, ideſt quadratum b a* (b) *aequabitur F h quadrato* (c)*; ergo ramus ex foco F b aequatur ipſi b a.*]

a ex pr. 16.

b 6. II. Elem.

c 47. I. Elem.

COROLLARIA.

I. Hinc conſtat, rectangulum TAH, ex ordinata axi, ad tangentem GM protenſa, in eius partem externam, aequari quadrato BF, diſtantiae foci ab ordinata.

II. Hinc quaelibet Sectio Conica deſcribi poterit, ſi in triangulo rectangulo BFM productis lateribus GF, GM, & ductis quibuſlibet ordinatis BA, b a ipſi MF parallelis, ex fixo puncto F ad ipſas inclinentur FH, Fh dictis ordinatis aequales, erunt enim puncta H, h ad parabolam, ſi latus GF ſit (d) aequale FM; ad Ellipſim autem ſi GF ſit (e) maius FM; ad Hyperbolam vero (& etiam ad eius (f) oppoſitam), ſi GF (g) minus FM.

III. Vbi tangens MG ex termino ordinatae ex foco FM ducta, concurrit cum axe, ſi agatur GPK parallela ordinatis, dicetur haec quoque in Ellipſi, & Hyperbola, (ut in Parabola (h) indicavimus) *Linea* *ſubli-*

d cor 1. pr. prec.
e cor. 2. pr. prec.
f ex Sch. huius pr.
g cor. 2. pr. prec.
h pr. 19.

a pr. 28. *ſublimatis*, ad quam ex quovis curvae pun-
b 34. I. to H ducta HK axi parallela, uti etiam MP,
Elem. erit ſemper ramus FH ex foco ad quodlibet
c cor. 1. punctum H ductus, ad ipſam HK, ut FM
prop. 4. ad MP, ſive ut FN, aut NO ipſi (a) aequa-
VI. El. lis, ad NG: quippe in eadem ratione [*FM*
d ex eo- *ad MP*, *vel FM* (b) *ad FG*, *vel NO* (c) *ad*
dem cor. *NG*,] eſt etiam (d) AB ad BG, adeoque & FH
e ex hac ad HK, cum ſint illis aequales (e).
prop., & IV. Quin etiam, ſi ex foco ad lineam
34. I. El. ſublimitatis ducatur quaelibet inclinata linea
FHS, ductoque alio ramo FL, agatur ipſi
Fig. 92. FS parallela LR ad eamdem ſublimitatis li-
neam terminata, in qualibet Sectione, erit
FH ad HS, ut FL ad LR, ductis enim axi
f ex cor. parallelis HK, LP, cum ſit FH ad HK, ut (f)
praeced. FL ad LP; & ob ſimilia triangula KHS, PLR,
g 4. VI. ſit HK ad HS, ut (g) LP ad LR, erit ex ae-
Elem. quo FH ad HS, ut FL ad LR.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 93. SI ex contactu Hyperbolae, aut Ellipſis,
94. ducatur tangenti perpendicularis MP ad axem tranſverſum terminata, & ex centro C in eamdem tangentem agatur perpendicularis CS, rectangulum ex PM in CS aequabitur quadrato ſemiaxis coniugati CA, ſeu quartae parti figurae rectanguli ex tranſverſo latere in ſuum rectum.

Ordinentur ad utrumque axem MK, MR. Similia erunt triangula HCS, PMK: ob aequidiſtantia enim latera SC, MP, angulus MPK

MPK (a) aequatur SCP, adeoque & CHS, quia uterviſ [*angulorum SCP, CHS*] cum HCS (b) rectum complet, ſuntque anguli recti MKP, HSC pariter aequales: igitur eſt MP ad MK, ut (c) CH ad CS; quare PM in CS aequatur (d) CH in MK, ſive in CR illi (e) aequalem: at HCR aequatur (f) CA quadrato; ergo pariter PM in CS eidem quadrato minoris ſemiaxis aequatur, ſeu quartae (g) parti rectanguli ex axe tranſverſo in ſuam parametrum. Q. E. D.

a 27. I. Elem.
b cor. 6. pr. 32. I. Elem.
c 4. VI. Elem.
d 16. VI. Elem.
e 34. I. Elem.
f cor. 5. prop. 18.
g poſt cor. 2. pr. 12.

COROLLARIA.

I. QVoniam etiam rectangulum ex verticalibus tangentibus QE, NO, eidem quadrato minoris ſemiaxis (h) aequatur, etiam huic aequale erit rectangulum ex PM in CS; unde QE ad CS erit, ut (i) PM ad NO.

h pr. 18.
i 16. VI. Elem.

II. Et ob ſimilitudinem (k) triangulorum [*rectangulorum*] EGQ, CGS, PGM, OGN, [*quibus communis eſt angulus G,*] cum ſit QG ad QE, ut GS ad CS, ut GM ad MP, ut GN ad NO; ſintque conſequentes proportionales, [*nempe QE ad CS, ut* (l) *MP ad NO,*] etiam antecedentes proportionales erunt, nempe QG ad GS, ut GM ad GN: unde rectangula QGN, MGS erunt (m) aequalia.

k 4. VI. Elem.
l ex cor. praeced.
m 16. VI. Elem.

III. Similiter [*ob ſimilia memorata triangula, eſt QG ad GE, ut* (n) *GS ad GC, ut GM ad GP, ut GN ad GO: Sed latera QG, GS, GM, GN, quae ſunt antecedentes*

n 4. VI. Elem.

a *coroll. praeced.* *rationum termini*, *proportionalia* (a) *ſunt*; *ergo*] & reliqua latera GE, GC, GP, GO [*quae ſunt earumdem rationum termini conſequentes*,] proportionalia erunt; adeoque re-

b *16. VI. Elem.* ctangulum EGO (b) aequabitur CGP.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 95. 96. 97. SI ex quolibet puncto M cuiuſvis Sectionis Conicae ducta ad tangentem ME perpendicularis MP, cum axe conveniat in P, & ex aliquo foco F ducto ramo FM, in ipſum ex P ducatur perpendicularis PD, erit portio MD aequalis ſemiparametro axis.

In Parabola id manifeſtum eſt, nam ducta diametro MR axi parallela, & ordinata ad axem MK, triangula MPD, PMK aequalia,

c *ex hypotheſi.* & ſimilia erunt, quia [*a rectis* (c), *ſeu aequalibus angulis PME, PMS, ablatis utrinque*

d *ex pr. 19.* *aequalibus* (d) *DME, RMS, ſupereſt*] angulus DMP aequalis PMR: [*huic vero ae-*

e *ex 27. I. Elem.* *qualis eſt alternus* (e) *MPK; ergo angulus DMP etiam*] aequabitur MPK, unde cum [*in triangulis MPD, MPK ad D, & K rectangulis*]

f *ex 26. I. El.* eadem ſit hypothenuſa MP, etiam latera (f) homologa DM, PK aequalia erunt: ſed KP

g *cor. 16. prop. 9.* ſubnormalis aequatur medietati lateris recti (g); ergo eidem aequalis erit MD.

In Ellipſi autem, & Hyperbola, ducta ex centro ad tangentem recta CI parallela ramo FM, & CS perpendiculari, ſeu parallela MP, erit angulus ICS aequalis PMD; utervis enim cum CIS, aut FME huic aequali

re-

rectum (a) complet: unde in triangulis (b) ſimilibus ICS, PMD, eſt IC ad CS, ut MP ad MD, & rectangulum ex IC in MD aequatur (c) CS in MP; ſed hoc (d) aequatur quartae parti rectanguli ex axe QN in ſuam parametrum; ideſt CN in ſemiparametrum; ergo & illud: quare cum ſit IC aequalis ſemiaxi CN (e), MD aequatur ſemiparametro. Q. E. D.

a *cor.* 6. *pr.* 32. *I. El.*
b 4. *VI. Elem.*
c 16. *VI. Elem.*
d *per pr. praeced.*
e *pr.* 21.

COROLLARIVM.

Fig. 96. 97.

DVcto etiam ramo VM, & in ipſum ex P ducta perpendiculari PR, erit MR aequalis ſemiparametro; nam [*ſi a rectis* (f) *ſeu aequalibus angulis PMG, PMI in Ellipſi, aut PMG, PMY in Hyperbola, auferantur aequales* (g) *anguli DMG, RMI in Ellipſi, aut DMG, RMY in Hyperbola, etiam reſidui DMP, RMP aequales erunt: recti vero* (h) *ſunt anguli D, & R; ergo etiam* (i) *aequantur reliqui DPM, RPM, ideoque*] triangulorum MPD, MPR latera omnia ſunt (k) aequalia, nempe MD ipſi MR, & PD alteri PR, ob aequales angulos DMP, RMP, nec non DPM, & RPM, [*communi lateri PM adiacentes.*]

f *ex hypotheſi.*
g *pr.* 20.
h *ex hypotheſi.*
i *cor.* 9. *pr.* 32. *I. Elem.*
k 26. *I. Elem.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 96. 97.

REctangulum ex diſtantiis centri Ellipſis, aut Hyperbolae a concurſu tangentis MG cum axe, & concurſu perpendicularis MP cum eodem, nempe GCP, aequatur quadra-

to diſtantiae cuiuſvis foci a centro CF, aut CV.

a cor. 5. prop. 21. Eſt enim VG ad GF, ut (a) VP ad PF; ergo componendo in Ellipſi, & dividendo in Hyperbola, erit VG plus, aut minus GF ad GF, ut VP plus, aut minus PF ad PF: [*ſed VG, plus GF in Ellipſi eſt aequalis* b cor. 5. pr. 20. *VF, cum dupla FG, vel aequalis* (b) *duplae CF, cum dupla FG, vel aequalis duplae* c per idem cor. *CG: item VG, minus GF in Hyperbola aequatur rectae VC, plus CG, minus GF, ſeu* (c) *rectae CF, plus CG, minus GF, ſeu aequatur duplae CG; igitur dupla CG eſt ad GF,* d per idem. cor. *ut VP plus, aut minus PF ad PF,*] ideſt dupla CG ad GF, ut dupla (d) CF ad PF; ac ſumptis antecedentium medietatibus, erit CG ad GF, ut eſt CF ad PF; ac demum eadem antecedentia ad differentiam terminorum in Ellipſi, vel ad ſummam in Hyperbola, comparando, erit CG ad CG minus, aut plus GF, (quae erit CF), ut ipſa CF ad CF minus, aut plus PF, (quae eſt CP). e 17. VI. Elem. Quare GCP (e) aequatur quadrato ipſius CF, aut VC, cum ſint continue proportionales CG, CF, CP. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. Hinc quadratum ſemiaxis CN ad quadratum diſtantiae foci a centro CF eſt, ut CK ad CP; nempe ut diſtantia ordinatae ad axem MK a centro ad diſtantiam concurſus perpendicularis MP cum axe ab eo-

dem

dem centro; nam CN quadratum aequatur (a) GCK, & CF quadratum vidimus (b) aequari GCP, quae rectangula ſunt, ut CK (c) ad CP; [*ergo in hac ratione eſt etiam quadratum CN ad CF quadratum*].

a *cor.* 11. *pr.* 9.
b *in hac prop.*
c 1. *VI. Elem.*

II. Vnde CK ad CP eſt ſemper in eadem conſtanti ratione CN quadrati ad CF quadratum, ubicumque ſumptum fuerit punctum illud M.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 98. 99. 100.

IN omni Sectione Conica ſi tangentes BE, DE concurrant in E, recta ex E ducta, ſecans Sectionem in A, H, & rectam iungentem contactus BD in I, erit harmonice diviſa in his punctis, nempe reſultabit EH ad HI, ut (d) EA ad AI.

d *ex* 5. *ſecund. defin.*

Ducatur per punctum E diameter biſecans chordam BD in K, qui & biſecabit alias illi parallelas ex punctis A, & H ductas, AM, HS, in punctis L, R, quae concurrant cum una tangentium EB in O, & P. Erit ergo [*ut* (e) *REad EL, ita PR ad OL, & HR ad AL, adeoque etiam erit*] ut (f) quadratum RE ad quadratum EL, ita quadratum PR ad quadratum OL, & quadratum HR ad quadratum AL, & reſiduum rectangulum (g) HPS ad AOM; ſed haec rectangula ſunt, ut (h) quadrata tangentium PB, OB; ergo quadratum PB ad quadratum OB eſt pariter, ut quadratum RE ad quadratum EL, ſive ut qua-

e *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
f *pr.* 22. *VI. El.*
g 6. *II. Elem.*, & 19. *V. El.*
h *cor.* 3. *pr.* 16.

quadratum PE ad EO quadratum. Eſt itaque tangens EBP harmonice (a) ſecta, cum ſit PE ad EO, ut PB ad BO; quare etiam ab iiſdem parallelis PR, BD, OM ſecta (b) erit EH harmonice: eritque HE ad EA, ut HI ad IA. Q. E. D.

a def. 5. ſecund. defin.

b ex pr. 10. VI. Elem.

COROLLARIA.

I. Viciſſim ſi ex puncto E alicuius tangentis EB agatur EH ſecans Conicam Sectionem in A, & H; & fiat, ut HE ad EA, ita HI ad IA, & iuncta BI occurrat ſectioni in D, iuncta ED erit pariter tangens: nam ſi tangens ex E ad illam partem ducta non occurreret ſectioni in D, ſed in alio puncto [*T*] ipſam tangeret, ex hoc alio contactu ducta recta [*TB*] ad contactum B, ſecaret AH in alio puncto [*V*] diverſo ab I, cuius partes [*HV*, *VA*] forent pariter in ratione HE ad EA [*ſeu* (c) *HI ad IA*,] ob harmonicam ipſius diviſionem. Eſt autem impoſſibile, quod HA ſecetur in eadem ratione HI ad IA in alio puncto [*V*] diverſo ab I; ergo tangens ex E ducta ad partes D, non alibi curvam tangere poteſt, quam in ipſo D.

c ex hypotheſi.

II. Pariter ſi ex puncto E extra Sectionem Conicam ducta ſecans EAH, harmonice in illis punctis, & in I ſecta ſit, ducta ex puncto E diametro, & ex I ad ipſam diametrum ordinata BID, iunctae EB, ED erunt tangentes; nam ſi alibi tangerent, iungens contactus ipſam EH harmonice ſecaret extra punctum I, quod eſt impoſſibile.

III. Si-

III. Similiter ſi binae ſecantes ex E ductae, EAH, EMS in punctis aliis I, X, & in praecedentibus fuerint harmonice ſectae, ducta recta IX ſectionem ſecante in B, D, iunctae EB,ED erunt tangentes, ob eamdem rationem.

PROPOSITIO XXXIV.

EX concurſu E tangentium ED, EB, ductis binis ſecantibus Sectionem Conicam EAH, EMS in punctis A, H, & M, S, iuncta MA, & SH, aut erunt parallelae iungenti contactus BD (ut in figuris propoſitionis praecedentis), aut in unum, idemque punctum T ipſius rectae BD concurrent, ſive intra, ſive extra Sectionem. Fig. 101. 102. 103.

Si enim AM ſit parallela BD, erit EA ad AI, ut (a) EM ad MX; Atqui EA ad AI eſt, ut EH ad HI (quia harmonice ſecta eſt EH, eſtque EH ad EA, ut HI ad AI), & ſimiliter, ut EM ad MX, ita ES ad SX; ergo [*EH eſt ad HI, ut* (b) *ES ad SX, & permutando, EH ad ES, ut HI ad SX, ſeu ut* (c) *reliqua EI ad reliquam EX, vel ut* (d) *EA ad EM; quare permutando,*] EH ad EA eſt, ut ES ad EM, [*& dividendo, HA ad AE, ut SM ad ME*]: unde etiam HS parallela (e) eſt AM, & BD. Si vero non ſint parallelae, ſed HS concurrat cum BD in T, ductis per A, & M rectis YAZ, FMG parallelis HT, convenientibus cum TI in Y, & F, ac cum iuncta ET in Z, & G, erit HT ad AZ, ut (f) HE ad EA, ſive (g) HI ad IA, vel

a 17. *VI. Elem.*
b *ex pr.* 11. *V. El.*
c 19. *V. Elem.*
d *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
e *pr.* 2. *VI. El.*
f *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
g *ex pr. praeced.*

a *ex pr.* 4. vel ut (a) eadem HT ad AY, ob ſimilia triangu-
VI. El. la TIH, IAY; quare erit AZ (b) aequalis
b *prop.* 9. AY. Similiter erit MG aequalis MF; quia
V. Elem. cum ſit SE ad EM, ut (c) SX ad XM, erit
c *ex pr.* quoque ST ad MG, ut eadem ST ad MF ob
praeced. ſimilia triangula TXS, MXF; ergo iuncta
d *ex cor.* TM erit in directum ipſi (d) MA, quoniam in
2. *pr.* 4. triangulo YTZ rectae YZ, FG parallelae in
VI. El. eadem aequalitatis ratione ſecantur: unde eadem linea debet eſſe TMA, alias iuncta linea AT, ſi non tranſiret per M; bifariam ſecaret FG in alio puncto diverſo ab M; quod eſt abſurdum. Itaque rectae HS, AM conveniunt in idem punctum T rectae BD. Q. E. D.

COROLLARIA.

Fig. 104. 105. I. SI rectae ſecantes EAH, EMS ſint infinities proximae, rectae AM, HS, [*utpote arcuum infinite parvorum AM, HS chordae*] infinite parvae, convenient cum partibus infiniteſimis ſuae curvae, adeoque productae ad punctum T rectae BD convenientes, erunt ipſius Conicae Sectionis tangentes. Quare ſi quaelibet linea EAH ex concurſu duarum tangentium E, ſecans Sectionem in A, H, deducatur, atque ex punctis A, H aliae tangentes ducantur, convenient ad punctum T rectae BD iungentis priores contactus: ſeu ducta una tangente AT, concurrente cum ipſa BD in T, iuncta TH erit tangens.

e *ex pr. praeced.* II. Et recta TB erit harmonice (e) diviſa in

in punctis T, D, B, & in concurſu I cum illa ſecante, nempe erit BT ad DT, ut BI ad ID.

PROPOSITIO XXXV.

EX concurſu E tangentium EB, ED ducta quavis ſecante EAIH, concurrente cum BD, iungente contactus, in I, ſi ipſi BD agatur parallela AM, iuncta HM bifariam ſecabit BD in K, & ipſi BD ductae ex E parallelae EV, occurrens in V erit harmonice ſecta ad puncta H, K, M, V, nempe erit HV ad VM, ut HK ad KM. Fig. 106. 107.

Quoniam aequidiſtantes ſunt BD, AM, EV, in eadem utique ratione ſecantur ab ipſis EH, & VH; quare cum EH ſit ab illis harmonice (a) ſecta, etiam VH ab iisdem harmonice ſecta erit; ideoque HV eſt ad VM, ut HK ad KM; ſed ducta EK ſecante AM in L, & HG parallelam AM in G, erit ut HV ad VM, ſive (b) ut HE ad EA, ita HG (c) ad AL, atque ita (d) HK ad KM, adeoque (e) & HG ad LM (ob ſimila triangula GKH, LKM): ergo eſt HG ad AL, ut eadem HG ad LM, ideoque (f) AL aequatur LM: unde erit AM ordinata ad diametrum, cui ordinatur etiam eius parallela BD, tranſeuntem per concurſum tangentium E, qualis erit ipſa ELK; unde & BD ſecta eſt bifariam in K ab ipſa ſecante HMV. Q. E. D.

a *pr.* 33.
b *ex pr.* 2. *VI. El.*
c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
d *ex demonſtr.*
e *prop.* 4. *VI. El.*
f *prop.* 9. *V. El.*

COROLLARIA.

I. HInc ſi per medium punctum K rectae BD, iungentis duos contactus, traiiciatur quaelibet recta HK ſecans curvam in H, M, & EV ipſi BD parallelam, in V, erit in his punctis V, M, K, H, harmonice ſecta; [*ducta enim ſecante EAIH, iungatur AM, quae parallela erit rectis BD, EV, alioquin iuncta HM non tranſiret* (a) *per medium punctum K contra hypotheſim; igitur ſunt parallelae BD, AM, EV, ideoque HV harmonice* (b) *ſecta erit in punctis V, M, K, H.*

a ex hac prop.

b ex hac prop.

II. Si ex quolibet puncto V rectae EV parallelae BD ducatur ſectionis tangens VA, & ex A per medium punctum K rectae BD agatur recta AK, occurrens ſectioni in S, etiam iuncta VS erit tangens; cum enim VH [*tranſiens per medium punctum K*,] harmonice (c) ſecta ſit in V, M, K, H, ſitque VA tangens, debet eſſe tangens etiam VS; ſi enim alibi tangeret ſupra, aut infra punctum S, recta iungens contactus ſecaret MH [*in puncto aliquo Z, nempe*] alibi quam in K, ubi ſecat ipſam recta AS; ſed (d) recta iungens contactus ſecat harmonice ipſam ſecantem, ex concurſu tangentium ductam; ergo [*etiam in puncto Z, nempe*] alibi quam in K ſecaretur HM in ratione HV ad VM, quae eadem iam eſt, ac ratio HK ad KM, id quod eſt impoſſibile.

c cor. 1. huius pr.

d ex pr. 33.

III. Hinc habetur, quod ſi per idem ali-

-liquod punctum K innumerae lineae SA, HM ducantur, & ex eorum terminis tangentes ducantur, invicem convenient, (dummodo punctum K non ſit centrum ſectionis; tunc enim quaelibet paria tangentium, ex terminis diametrorum ductarum per centrum, [*cum parallela eſſent ordinatis ad eaſdem diametros* (a), *utique etiam mutuo*] parallela forent, neque invicem uſquam convenirent) in eadem recta linea EP, ducta parallela illi rectae BD, (quae per illud punctum K bifariam ſecabitur,) ex puncto concurſus E tangentium ab illius extremitatibus ductarum BE, DE; nempe tam SV, AV, quam MP, HP conveniunt ad eamdem lineam VEP; [*cum enim AS non ſit* (b) *diameter, cui ordinatur BD, utique tangens AV non erit eidem BD* (c) *parallela, adeoque nec parallela erit alteri VEP, quae ponitur aequidiſtans rectae BD; quare tangens AV occurret* (d) *rectae VEP in aliquo puncto V: recta autem AS tranſit per medium* (e) *punctum K iungentis contactus BD; ergo etiam SV* (f) *ſectionem tanget in S, ideoque tangentes, ductae ex terminis rectae SA, mutuo convenient in linea VEP. Eamdem ob cauſam in eadem linea VEP convenient quoque tangentes reliquae, ductae ex terminis rectae HM; unde liquet propoſitum.*]

a *ex pr.* 14.

b *ex hypotheſi.*

c *ex pr.* 14.

d *ex Sch. prop.* 31. *I. Elem.*

e *ex hypotheſi.*

f *ex cor.* 2.

IV. Vnde ſi per focum F quaevis linea traiiceretur RS, tangentes ab eius extremitatibus ductae RV, SV convenient in V ad lineam ſublimitatis EV, quae per concurſum tangentium ex terminis ordinatae per fo-

Fig. 108. 109.

ſocum ductarum, deducitur parallela ipſi ordinatae, de qua dictum eſt in prop. 19. de Parabola, & in cor. 3. pr. 29. de Ellipſi, & Hyperbola.

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 108. 109. EX foco F cuiuſvis Conicae Sectionis ductis ad curvam duobus ramis FA, FB, & ex ipſis punctis A, B ductis tangentibus BD, AD convenientibus in D, iuncta DF biſariam ſecabit angulum AFB ab ipſis ramis contentum.

Occurrat DF Sectioni in R, S, ac rectae BA, quae iungit contactus, in I; ductiſque tangentibus RV, SV, hae convenient (a) cum ipſa BA in eodem puncto V, idemque punctum V erit ad lineam ſublimitatis EV (b): quare ductis ad ipſam lineam ſublimitatis perpendicularibus AH, BP, erit ut BP ad AH, ita (c) BV ad VA, ſed quia BV harmonice (d) ſecta eſt in punctis B, I, A, V, eſt BV ad VA, ut BI ad IA; ergo [*BP ad AH eſt, ut BI ad IA, ideoque*] erit BI ad IA, ut BF ad FA, quae ſunt pariter, ut BP ad AH, cum ſit tam BF ad BP, quam FA ad AH in eadem ratione FN ad NE (e). Itaque Angulus AFB ſecatur biſariam a recta DF, cum baſis AB ſecetur in I in ratione (f) laterum trianguli ABF. Q. E. D.

a cor. 1. prop. 34.
b cor. 4. pr. 35.
c cor. 2. prop. 34.
d cor. 2. prop. 34.
e cor. 3. prop. 29.
f 3. VI. Elem.

CO-

COROLLARIA.

I. HInc ſi rami ex foco ſint in directum, ut reſultat per quamlibet rectam SR per focum traductam, ductis ab eius extremis tangentibus SV, RV convenientibus cum linea ſublimitatis in V, iuncta VF erit ipſi RS perpendicularis, quia anguli SFV, RFV duobus rectis aequantur, quorum medietas eſt quilibet angulus VFS, aut VFR rectus, uti de Parabola oſtenſum eſt ſupra (a). a *cor. 9. prop. 19.*

II. Per quodlibet punctum A curvae interceptae inter terminos R, S rectae per focum traductae, ducatur alia tangens AT, occurrens tangentibus RV, SV ad puncta G, T, iunctae ad focum rectae GF, TF angulum rectum GFT comprehendent, quia angulus GFA erit (b) medietas anguli RFA, & angulus AFT (c) medietas anguli AFS, adeoque GFT eſt medietas duorum rectorum, quibus (d) aequantur RFA, AFS, [*proindeque rectus erit angulus GFT.*] Fig. 110. 111. b *per hanc prop.* c *per eamdem.* d 13. I. *Elem.*

PROPOSITIO XXXVII.

EX tangente Hyperbolae ANR ad verticem cuiuſvis diametri NQ ſumantur hinc inde partes NA, NR aequales ſemidiametro coniugato CG, ſive quarum quadrata ſint aequalia quartae parti rectanguli ſub tranſverſo latere QN, & ſub recto NS, tum ex centro C iunctae CA, CR utcumque producantur, hae ad curvam hyperbolicam ſemper Fig. 112.

propius accedent, quam pro quolibet dato intervallo P, numquam tamen cum ipſa convenient. Dicantur autem haę rectae *Aſymptoti* ipſius Hyperbolae.

Ordinata enim ad eamdem diametrum recta MKV parallela tangenti, ſecante dictas rectas aſymptotos in D, Z, erit [*DK ad CK, ut AN* (a) *ad NC, ſeu*] quadratum DK ad quadratum CK, ut (b) quadratum AN, quod eſt quarta (c) pars rectanguli QNS, ad quadratum NC, quod eſt pariter quarta pars quadrati QN, adeoque ut rectangulum QNS ad quadratum QN, ſive ut (d) rectum latus NS ad tranſverſum QN, quae pariter eſt ratio quadrati ordinatae MK (e) ad rectangulum QKN: quare cum ſit totum quadratum DK ad totum quadratum CK, ut quadratum MK ex priori ablatum, ad rectangulum QKN ſumptum ex poſteriori, reſiduum (f) quoque illius ad reſiduum huius, nempe (g) rectangulum DMZ ad quadratum (h) CN erit in eadem ratione quadrati AN ad CN: Vnde patet, eſſe dictum rectangulum DMZ aequale (i) quadrato AN, ſive rectangulo ANR; ergo ut MZ ad NR, ita (k) AN ad DM, eſtque ſemper prima [*MZ maior KZ, adeoque*] multo maior ſecunda [*NR*]; ergo & tertia [*AN*] maior eſt quarta [*DM*]; ideoque cum producta in infinitum Hyperbola ſemper maior, ac maior fiat MZ ipſa NR, etiam AN ſemper multo maior evadet intervallo DM, quod continuo minuetur in infinitum, uti creſcit magis, ac magis in infinitum ipſa

a *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
b 22. *VI. Elem.*
c *ex hypotheſi.*
d 1. *VI. Elem.*
e *cor.* 6. *prop.* 5.
f 19. *V. Elem.*
g 5. *II. Elem.*
h 6. *II. Elem.*
i 9. *V. Elem.*
k 16. *VI. Elem.*

ipſa MZ; ita ut ratio illa AN ad DM maior fieri poſſit qualibet data ratione AN ad P, uti maior eadem ratione poteſt fieri ratio MZ ad NR; quia creſcere poteſt in infinitum, tam ordinata MK Hyperbolae, quam ordinata ZK trianguli, & ipſarum quaelibet, ac multo magis utriuſque ſumma MZ evadere poteſt maior qualibet data, in maiori receſſu a vertice N ipſius Hyperbolae. Accedit ergo CA magis, ac magis ad curvam Hyperbolae NM, a qua minori ſemper intervallo DM diſtat, quod minus eſſe poteſt quolibet dato P, nec umquam cum ipſa penitus concurret, quia ſemper punctum M aliquo modo diſtabit a puncto D, ut eſſe poſſit rectangulum DMZ aequale quadrato AN, uti iam eſt demonſtratum.

COROLLARIA.

I. EAedem rectae Aſymptoti ultra angulum C continuatae abſcindent pariter ex oppoſiti verticis tangente rectas QE, QX prioribus [*AN*, *NR*] aequales, ob ſimilitudinem (a) triangulorum QEC, CAN, [*itemque* *QXC*, *CNR*], quorum aequalia ſunt latera [*homologa*] QC, & CN: unde patet ipſaſmet CE, CX evadere eodem modo Aſymptotos oppoſitae Hyperbolae QI, cuius idem eſt latus tranſverſum, & latus rectum.

a 4. *VI. Elem.*

II. Quaelibet uni aſymptoto parallela BH intra angulum ACR ducta, Hyperbolae occurret; quia intervallum parallelarum idem ſemper manet, dum intervallum Hyper-

bolae ab aſymptoto ſemper minus evadit quolibet dato.

III. Multo magis quaelibet BC angulum ACR dividens, Hyperbolam ſecabit; quippe ejus diſtantia ab aſymptoto ſemper augebitur, dum Hyperbolae diſtantia ſubinde minuitur.

IV. Patet aequalia eſſe rectangula DMZ, dmz a portionibus quarumlibet parallelarum diametro ordinatarum, per Hyperbolae curvam, & per aſymptotos ſectis, contenta; quippe ſingula (etiam DVZ, & duz) quadrato AN ſunt (a) aequalia.

V. Etiam partes hinc inde acceptae inter curvam, & aſymptotos, nempe DM, & VZ aequales ſunt; nam [*ob parallelas AR, DZ, quas ſecat diameter QCK, eſt AN ad NR, ut* (b) *DK ad KZ; unde*] ut AN (c) aequatur NR, ita DK aequatur KZ, & ordinata MK eſt aequalis KV, adeoque & reliqua DM eſt aequalis VZ.

VI. [*Si rectus ſit angulus aſymptoticus ACR, Hyperbola MNV aequilatera erit; circulus quippe radio NA, vel NR deſcriptus* (d) *tranſibit per punctum C, ideoque ſemidiameter tranſverſa CN aequabitur NA, vel ſemidiametro conjugatae* (e) *CG, unde* (f) *aequilatera eſt Hyperbola MNV.*]

VII. [*Et viciſſim, ſi aequilatera ſit Hyperbola MNV, rectus erit angulus aſymptoticus ACR; cum enim ſemidiameter tranſverſa CN aequari debeat ſemiconjugatae CG* (g), *vel NA* (h), *aut NR; circulus radio NA, aut NR deſcriptus, tranſibit per punctum C, rectuſque proinde* (i) *erit angulus ACR.*]

a *ex demonſtra. huius pr.*
b *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*
c *per hanc prop.*
d *ex* 31. *III. El.*
e *ex hac prop.*
f *ex cor.* 7. *pr.* 25.
g *ex cor.* 7. *pr.* 25.
h *ex hac prop.*
i *ex* 31. *III. El.*

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII.

SI quaelibet recta TD Hyperbolam alibi contingat, velut in V, occurrens aſymptotis in T, D, erit TV aequalis VD, & cuiuslibet quadratum aequale pariter quartae parti rectanguli ſub diametro ICV, & eius latere recto VF contenti. Fig. 113.

Quando enim hoc non eveniret; ſumptis hinc inde VG, VB, quarum quadrata aequarentur quartae parti dicti rectanguli, iunctae CG, CB eſſent (a) aſymptoti; id quod eſt impoſſibile; nam ſi CG cadat ultra CT, ab ipſa magis, ac magis divertet in infinitum producta, adeoque non accedet curvae hiperbolicae, ut facit aſymptotus (b) CT; & ſi cadat intra angulum aſymptoticum TCD, ut recta CB, haec producta ſecabit (c) ipſam Hyperbolam; adeoque non erunt CG, CB aſymptoti: ergo ipſae portiones VT, VD, non vero ipſis maiores, aut minores, continebunt quadratum aequale quartae parti rectanguli ſub latere tranſverſo IV, & latere recto VF contenti; unde invicem ſunt aequales. Q. E. D.

a per pr. praeced.

b ex eadem pr.

c ex cor. 3. prop. praeced.

COROLLARIA.

I. ORdinata pariter ad diametrum CV recta LKO parallela tangenti TD, occurrente aſymptotis in P, S, erit rectangulum PLS, aut POS aequale pariter quadrato

to VT, quemadmodum ſimile quid demonſtratum eſt propoſitione praecedenti.

II. Hinc pariter interceptae inter curvam, & aſymptotos PL, OS ſunt aequales; unde quaecumque recta PS ſecet Hyperbolam, & aſymptotos, eius portiones curvae, & aſymptotis interpoſitae aequales evadunt; nam bifariam ſecta OL in K, & iuncta ex centro diametro CK, occurrente Hyperbolae in V, ac per V ducta ipſi OL parallela TVD erit (a) tangens, in V bifariam (b) ſecta, [*quemadmodum etiam in K* (c) *biſecta erit tangenti parallela SP*]; & rectangula PLS, POS (d) quadrato TV, aut VD aequabuntur: Vnde [*ſi ab aequalibus KP, SK auferantur aequales ſemiordinatae KL, KO*], portiones PL, OS debent aequales eſſe.

a *ex pr.* 14.
b *ex hac prop.*
c *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*
d *cor.* 1. *huius pr.*

III. Conſtat ex dictis in hac propoſitione unicas eſſe aſymptotos CT, CD, nec poſſe alias aſymptotos eidem Hyperbolae aſſignari.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 114. SI quaelibet QO Hyperbolas oppoſitas ſecet, occurrens aſymptotis in E, Z, ducta per centrum diametro ICV eidem QO parallela, erit rectangulum EOZ aequale quadrato ſemidiametri CV.

Ducatur tangens TVD, & per O ipſi tangenti parallela ordinetur OL eidem diametro, quae aſymptotos ſecet in P, S. Ratio rectanguli EOZ ad rectangulum SOP componetur rationibus (e) laterum EO ad OP, (idest

e *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*

(ideſt (a) CV ad VT), & ZO ad OS, (nempe (b) CV ad VD); ſed & ratio quadrati CV ad rectangulum TVD, ideſt ad quadratum VT ex iiſdem (c) rationibus componitur; ergo ut rectangulum EOZ ad aliud SOP, ita quadratum CV ad quadratum VT; [*& permutando, rectangulum EOZ eſt ad quadratum CV, ut rectangulum SOP ad quadratum VT*]; Sed (d) rectangulum SOP aequatur quadrato VT, ergo & rectangulum EOZ quadrato CV aequale erit. Q. E. D.

a 4. *VI. Elem.*
b *per eamdem.*
c *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
d *ex cor.* 1. *pr.* 38.

COROLLARIA.

I. Similiter oſtendetur rectangulum ZQE quadrato CI aequari, quod CV quadrato aequale eſt: unde aequalia erunt rectangula EOZ, & ZQE, & rectae OZ, QE erunt pariter aequales; quia horum rectangulorum aequalitas dat rationem laterum EO ad EQ aequalem (e) rationi QZ ad ZO, unde componendo, OQ ad QE erit, ut OQ ad ZO; quare interceptae aſymptotis, & utraque Hyperbola QE (f), & OZ aequantur, ſicut etiam OE, & QZ aequabuntur, ſicut & rectangula QEO, QZO aequalia erunt [*tum mutuo, tum etiam rectangulis EOZ, ZQE, vel quadrato CV*].

e 16. *VI. Elem.*
f 9. *V. Elem.*

II. Et quia ducta etiam qualibet alia ozeq eidem diametro VCI parallela, erit pariter (g) rectangulum eoz, aut zqe, ſeu qeo, aut qzo eidem quadrato CI aequale; erunt ergo invicem aequalia quaelibet rectangula EOZ, eoz, a portionibus rectarum

g *ex cor.* 1.

aequidiſtantium, interceptis Hyperbola utraque, & aſymptotis, contenta, & partes oz, qe aequales reſultabunt, nec non eo, & zq.

PROPOSITIO XL.

Fig. 115. 116. SI in eadem Hyperbola, vel in oppoſitis duo puncta O, V accepta fuerint, ex quibus rectae OS, VD invicem parallelae ductae fuerint, ad aſymptotos terminatae, nec non duae aliae OP, VT pariter invicem parallelae ductae ſint uſque ad easdem aſymptotos, erit rectangulum SOP aequale rectangulo DVT.

Iuncta enim recta OV, quae aſymptotis occurrat in I, L erunt interceptae OI, VL (a) aequales, nec non OL, & VI aequabuntur; ergo OL ad VL eſt, ut VI ad OI; ſed ob ſimilia triangula [*OPL*, *VTL*, & *VDI*, *OSI*] eſt OP ad VT, quemadmodum (b) OL ad VL, atque VD ad OS, ut (c) VI ad OI; ergo OP ad VT eſt, ut VD ad OS; quare (d) rectangula SOP, DVT aequantur.

a *cor.* 2. *pr.* 38.
b 4. *VI. Elem.*
c 4. *VI. Elem.*
d 16. *VI. Elem.*

COROLLARIA.

Fig. 117. I. SI per quaelibet puncta Hyperbolae V, N ductae ſint ad aſymptotos parallelae VT, VD, & NR, NA, erit parallelogrammum RNA aequale parallelogrammo TVD; nam quia haec rectangula ſunt (e) aequalia,

e *per hanc prop.*

[*erit*

[*erit RN ad TV, ut reciproce* (a) *VD ad NA: iam vero angulus TVD aequatur* (b) *angulo TCD, & angulus RNA*(c) *aequatur RCA; ergo cum angulus TCD idem ſit cum RCA, etiam angulus TVD aequabitur RNA, adeoque*] etiam aequiangula parallelogramma [*TVD, RNA*] ob aequalem laterum reciproce comparatorum rationem, aequalia (d) erunt.

II. Vnde & triangula CNR, CVT, eorum parallelogrammorum dimidia(e)aequari debent.

III. Hinc ſemper ratio ordinatarum ad aſymptotum NR, VT alteri aſymptoto aequidiſtantium, eadem eſt, ac ratio diſtantiarum, reciproce ſumptarum CT, CR, ob aequalia illa (f) rectangula, aut (g) parallelogramma, vel triangula (h) ſupradicta, quae circa aequales angulos latera habere debent (i) reciproce proportionalia.

IV. Ductis tangentibus PNM, HVG ad aſymptotos terminatis, quae bifariam (k) ſectae ſunt in contactibus N, V, erunt quoque triangula CPM, CHG huic ſpatio aſymptotico inſcripta, invicem aequalia, quippe dupla parallelogrammorum aequalium (l) RNA, TVD, ſeu quadrupla triangulorum aequalium(m) CNR, CVT. [*Nam ob parallelas NA, PC, eſt PM ad MN, ut* (n)*CM ad MA: eſt vero PM* (o) *dupla MN; ergo etiam CM dupla erit MA, vel AC; quare triangulum CNM eſt* (p) *duplum trianguli CNA, ſeu aequale parallelogrammo RNA*(q)*: ſed triangulum PCM eſt* (r) *duplum trianguli CNM, ob PM duplam MN* (ſ)*; ergo triangulum PCM duplum eſt parallelogrammi RNA,*

a 16. *VI. Elem.*
b 34. *I. Elem.*
c *per eamdem.*
d 14. *VI. Elem.*
e 34. *I. Elem.*
f *per hanc prop.*
g *ex co.* 1.
h *ex co.* 2.
i 14., & 15. *VI. Elem.*
k *ex pr.* 38.
l *ex co.* 1.
m *ex cor.* 2.
n *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
o *ex pr.* 38.
p 1. *VI. Elem.*
q 34. *I. Elem.*
r 1. *VI. Elem.*
ſ *ex demonſtr.*

RNA, ſeu quadruplum trianguli CNR. Eodem modo triangulum GCH duplum oſtendetur parallelogrammi TVD, vel quadruplum trianguli CVT.]

V. Quadrilatera mixta RNVT, & ANVD ſunt invicem aequalia, nam ob aequalitatem (a) parallelogramniorum TVD, RNA, communi ablato CRXD, eſt TVXR aequale ANXD, & adiecto utrinque trilineo VXN, fit RNVT aequale ANVD.

a *ex cor.* 1.

VI. Item ſector hyperbolicus CVN aequatur cuilibet ex dictis quadrilateris RNVT, aut ANVD; Nam ob triangulum RCN aequale (b) CTV, dempto utrinque triangulo CRZ, [*eſt quadrilineum VTRZ aequale triangulo ZCN*,] additoque trilineo VZN, reſultat VCN ſector aequalis ipſi RNVT, aut huic (c) aequali ANVD.

b *ex cor.* 2.

c *ex cor.* 5.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 118. SI Hyperbolae NV, GH ſint inter aſymptotos ACE, & CT, quae angulos ACT, TCE ſibi conſequentes binis rectis aequales comprehendunt, & illas curvas ſecent rectae NH, VG uni aſymptotorum ACE parallelae, ſecabuntur ab alia aſymptoto CT in punctis R, T in eadem ratione.

Nam ordinatae NR, VT ſunt, ut reciprocae diſtantiae (d) TC, CR, in qua pariter ratione erunt (e) aliae ordinatae RH, TG; quare [*NR ad VT erit, ut RH ad TG*] & permutando, erit NR ad RH, ut eſt VT ad TG. Q.E.D.

d *ex cor.* 3. *prop. praeced.*

e *per idem cor.*

CO-

COROLLARIA.

I. HInc quadrilaterum RNVT ad quadrilaterum HRTG erit ſemper in eadem ratione NR ad RH, eo quod omnes rectae in utroque ordinatae, ipſis NR, & RH parallelae, [*ex quarum ſumma componi concipiuntur quadrilinea RNVT, HRTG,*] ſunt in data ratione [*NR ad RH.*]

II. Et iunctis ad centrum C rectis NC, VC, GC, CH erunt pariter ſectores CNV, CGH in eadem ratione; utpote dictis quadrilineis RNVT, & RHGT aequales (a). *a cor. 6. pr. prec.*

III. Si ex punctis N, H agantur tangentes Hyperbolarum ad aſymptotos productae, exiſtente NH aſymptoto ACE parallela, convenient tangentes ad idem punctum T alterius aſymptoti; Nam quia [*HR eſt parallela EC, erit HE ad HT, ut RC ad RT; quare ſicuti*] HE (b) aequatur HT, etiam CR aequabitur RT, & quia AN (c) aequatur NT, pariter CR eidem RT aequatur; quare utrinque reſpondet eadem RT aequalis CR: unde idem eſt punctum T, in quo duae illae tangentes conveniunt. *b ex pr. 38. c per eamdem.*

IV. Et ſi ex eodem puncto T unius aſymptoti agantur Hyperbolarum tangentes THE, TNA, iungens contactus HN alteri aſymptoto ACE parallela erit; Quoniam utraque illa tangens bifariam (d) ſecatur in contactibus H, N; ideoque latera TE, TA proportionaliter ſecta ſunt ab ipſa recta HN, quae propterea parallela (e) erit baſi EA. *d ex pr. 38. e 2. VI. Elem.*

V. Ipſa-

V. Ipſaque triangula CAT, CTE illis aſymptoticis ſpatiis inſcripta, [*cum ſint, ut* (a) *baſes AC, CE,*] erunt ſemper in data ratione, quae eſt NR ad RH, quibus proportionantur (b) baſes AC, & CE; idque etiam in triangulis [*CTE*, *CFK*] ad idem punctum [*T*] minime concurrentibus eveniet, quia in quolibet aſymptotico ſpatio eiuſdem Hyperbolae inſcripta triangula [*CAT*, *CFK*] per ſuas tangentes aequalia (c) ſunt.

a 1. *VI. Elem.*
b *cor.* 2. *prop.* 4. *VI. El.*
c *cor.* 4. *pr.* 40.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 119. Si ad ſecundam diametrum HI, priori diametro tranſverſae NQ coniugatam fiant duae oppoſitae Hyperbolae HK, IF, quarum viciſſim ſecunda diameter coniugata ſit eadem NQ, erunt harum quatuor ſectionum communes aſymptoti. Vocentur autem hae pariter *Sectiones coniugatae*.

Ductis tangentibus NT, IT convenientibus in T, quae erunt parallelae (d) ordinatis diametrorum NQ, HI, adeoque & coniugatis ſemidiametris CI, CN, iuncta CT, erit aſymptotus communis utrique Hyperbolae NV, IF, quia cum ſit CNTI parallelogrammum, eſt NT quadratum aequale (e) quadrato CI, ſeu quartae parti (f) rectanguli ſub tranſverſo latere QN, & eius latere recto; & ſimiliter tangens IT aequalis ſemidiametro alteri Hyperbolae coniugato CN, continet quadratum aequale (g) quartae parti rectanguli ſub tranſverſo latere HI, & re-

d *ex pr.* 14.
e *ex* 34. *I. El.*
f *poſt cor.* 2. *pr.* 12.
g *poſt corol.* 2. *pr.* 12.

& recto ſibi correſpondente comprehenſo; ac ſimiliter ducta alterius oppoſitae Hyperbolae HK tangente HA parallela ipſi IT, ac producta tangente TN, concurrente cum HA in A, erit HANC parallelogrammum, ipſaeque tangentes NA, HA aequales erunt coniugatis ſemidiametris ſibi oppoſitis CH, CN; unde & iuncta AC, erit hiſce Hyperbolis aſymptotus (a) communis. Igitur ipſae TCX, ACE ſunt communes aſymptoti harum quatuor ſectionum, quae invicem *coniugatae* dicentur. Q. E. D.

a *ex pr.* 37.

COROLLARIA.

I. IVngens contactus NI, cum evadat diameter parallelogrammi CNTI, bifariam ſecabitur ab aſymptoto CT in R, quia CT eſt alia diameter eiuſdem parallelogrammi.

II. Et quia NI aequidiſtabit (b) alteri aſymptoto AE, etiam quaelibet alia VF iungens contactus aliarum tangentium PF, PV ex eodem aliquo puncto P communis aſymptoti deductarum, ipſimet AE aequidiſtabit, & bifariam ſecabitur in Z, cum ſint in eadem (c) ratione NR ad RI, ac VZ ad ZF, [*& NR* (d) *aequetur. RI*].

III. Et quia [*ob PF ad FM, ut* (e) *PZ ad ZC*], etiam CP bifariam ſecta eſt in Z, ut tangens PFM eſt bifariam (f) ſecta in F, erunt [*latera CZ, ZV trianguli CZV aequalia lateribus PZ, ZF trianguli PZF; aequantur autem* (g) *anguli CZV, PZF; igitur etiam* (h) *aequales erunt anguli CVZ, PFZ, ſeu*

b *ex cor.* 4. *prop. praeced.*
c *ex pr. praeced.*
d *ex cor.* 1.
e *ex cor.* 2. *huius pr., & pr.* 2. *VI. El.*
f *ex pr.* 38.
g 15. *I. Elem.*
h *ex* 4. *I. El.*

a 28. I. Elem. *ſeu alterni CVF, PFV, adeoque* (a) *CV parallela erit tangenti PF. Eodem ratiocinio triangulis CZF, PZV applicato, oſtendetur, etiam rectam CF eſſe tangenti PV parallelam; erunt igitur*] CF, CV ductae ex centro ad contactus, parallelae tangentibus PV, PF; adeoque erunt ſemidiametri coniugatae harum Hyperbolarum, quia PF aequatur CV ſibi parallelae, & PV aequatur parallelae CF,

b *ex pr.* 14. unde CV aequidiſtat ordinatis (b) ad diametrum CF, & CF aequidiſtat ordinatis ad (c)

c *ex eadem pr.* diametrum CV.

IV. Haec parallelogramma CNTI, CVPF ſemper erunt aequalia, ſicut aequantur tri-

d *cor.* 2. *prop.* 40. angula (d) CNR, CVZ, quae ſunt quartae partes dictorum parallelogrammorum.

V. Et quodvis parallelogrammum RL-

Fig. 120. SM iiſdem Hyperbolis coniugatis inſcriptum, contentum ab ipſarum tangentibus per terminos diametrorum coniugatarum ductis erit aequale cuilibet alteri inſcripto parallelogrammo ATEX ab aliis tangentibus, per terminos aliarum diametrorum coniugatarum ductis, comprehenſo; Haec enim pa-

e *cor.* 4. *prop.* 40. rallelogramma erunt quadrupla aequalium (e) triangulorum CLR, CAT, ſive aequalium (f)

f *ex cor.* 4. parallelogrammorum CVRF, CNTI.

VI. Iunctis quoque contactibus ad terminos coniugatarum diametrorum poſitis, fiet parallelogrammum KVFG aequale alteri HNIQ; ſunt enim haec parallelogramma

g *ex cor.* 5. medietates aliorum RLSM, ATEX invicem, (g) aequalium; quippe & triangula CNI, CVF, quartae partes dictorum parallelogrammo-

rum

rum KVFG, HNIQ, medietates ſunt (a) parallelogrammorum CNTI, CVRF, quae ſunt aliorum RLSM, ATEX pariter quadrantes; [*unde triangula CNI, CVF, quater ſumpta, ſeu parallelogramma HNIQ, KVFG, medietates ſunt quater ſumptorum parallelogrammorum CNTI, CVRF, ſeu medietates ſunt aequalium parallelogrammorum RLSM, ATEX.*] a 34. I. Elem.

PROPOSITIO XLIII.

ETiam in Ellipſi, ut in Hyperbolis coniugatis, parallelogramma RLSM, ATEX, ex tangentibus ad terminos duarum diametrorum coniugatarum GV, KF, aut NQ, HI ductis, comprehenſa, ſemper aequalia erunt; ſicut etiam ſunt aequalia parallelogramma eidem Ellipſi inſcripta KVFG, HNIQ ex rectis iungentibus terminos binarum diametrorum coniugatarum. Fig. 121.

Iungantur duo puncta V, I, & ad diametrum NQ ordinata per V recta VP, ſecante tangentem IT in Z; tum per I ad diametrum FK ordinata IB, quae tangenti VR occurrat in O, erit utique parallelogrammum CVOB aequale alteri CPZI; quoniam utrumque duplum (b) eſt trianguli ipſis inſcripti CVI: at concurrente ſemidiametro CF cum tangente IE in D, & ſemidiametro CN cum tangente VL in Y, atque utraque tangente ID, VL in Æ, erit parallelogrammum DCYÆ ad CFRV, ut hoc ipſum b 41. I. Elem.

pſum (a) ad CVOB, cum ſint aeque alta, & eorum baſes CD, CF, CB continue (b) proportionales, & idem (c) DCYÆ ad CNTI eſt, ut hoc ipſum ad CPZI, ob proportionales (d) baſes CY, CN, CP, & eamdem horum parallelogrammorum altitudinem; ergo inter DCYÆ, & CVOB, vel huic aequale CPZI tam eſt medium proportionale CFRV, quam CNTI; ergo haec duo ſunt aequalia: ſunt autem quartae partes parallelogrammorum RLSM, & ATEX; ergo haec pariter ſunt aequalia; & horum dimidia ſunt inſcripta reliqua KVFG, & HNIQ, (ut triangulum CFV eſt (e) dimidium CFRV, & triangulum CNI dimidium eſt (f) CNTI, quae triangula ſunt pariter quartae partes dictorum parallelogrammorum Ellipſi inſcriptorum): ergo haec pariter parallelogramma inſcripta ſunt aequalia, uti etiam aequantur alia circumſcripta. Q. E. D.

a 1. *VI. Elem.*
b *cor.* 11. *prop.* 9.
c 1. *VI. Elem.*
d *cor.* 5. *prop.* 18.
e 34. *I. Elem.*
f *per eamdem prop.*

COROLLARIA.

I. PAtet eſſe FC diviſam in B proportionaliter, ac NC in P; quia DCYÆ ad CVOB eſt, ut idem illud ad CPZI huic aequale, adeoque [*cum ſit DCYÆ ad CVOB, ut* (g) *DC ad CB*, & *DCYÆ ad CPZI, ut* (h) *YC ad CP*;] ratio DC ad CB eſt eadem, ac YC ad CP: ſed illa eſt dupla (i) rationis FC ad CB, haec autem dupla (k) rationis NC ad CP; ergo hae quoque (l) rationes FC ad CB, & NC ad CP ſunt aequales; Vnde quoties coniugatae ſunt diame-

g 1. *VI. Elem.*
h *per eamd. pr.*
i *ex cor.* 11. *pr.* 9. & *defin.* 10. *V. El.*
k *ex cor.* 5. *pr.* 18. & *defin.* 10. *V. El.*
l 35. *V. Elem.*

metri FK, VG, & pariter binae aliae coniugatae NQ, IH, ex termino V diametri VG ducta ordinata ad diametrum NQ, & ex termino I diametri IH, ordinata IB ad diametrum FK, ſecabuntur proportionaliter diametri NQ, & FK ab ipſis ordinatis; nam [*cum ſit NC ad CP* (a) *, ut FC ad CB, etiam*] NQ dupla NC erit ad CP, ut FK dupla FC ad CB, ſive illa ad reſiduum PN, ut haec ad reſiduum BF (b).

II. Quin etiam ſi ex utriuſque diametri conjugatae terminis N, I ordinentur ſuper alias coniugatas diametros Nh, IB, erunt hae diametri VG, FK in punctis h, B proportionaliter ſectae; erit enim VC ad C h, ut (c) YC ad CN (quia ordinata N h eſt parallela (d) tangenti YV), adeoque ut (e) CN ad CP, ſive ut (f) CF ad CB, ideoque VC ad C h, ut FC ad CB, & VC ad reliquam V h, ut (g) ipſa CF ad reſiduam FB; ac duplicatis antecedentibus, VG ad V h, ut KF ad FB; uti etiam dividendo, G h ad h V erit, ut KB ad BF.

III. Erunt ergo rectangula G h V, & KBF [*ſimilia* (h), *utpote quae latera habeant circa rectos, ſeu aequales angulos proportionalia, adeoque erunt in ratione duplicata* (i) *laterum h V, BF, vel* (k) *CV, CF, aut*] ut quadrata (l) CV, CF, ſeu GV, KF, [*vel ut quadratum lateris tranſverſi GV ad* (m) *GV in ſuum latus rectum*,] aut ut latus tranſverſum GV ad (n) ſuum latus rectum, ſive ut rectangulum G h V ad (o) quadratum N h, [*aut ad quadratum I b*,] vel ut quadra-

K tum

a *ex demoſtrat.*
b 19. *V. Elem.*
c *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
d *ex pr.* 14.
e *cor.* 5. *prop.* 18.
f *ex cor. praeced.*
g 19. *V. Elem.*
h *def.* 1. *VI. El.*
i *pr.* 20. *VI. El.*
k *ex cor. praeced.*
l *cor.* 1. *pr.* 20. *VI. El.*
m *ex cor.* 8. *pr.* 13.
n *ex* 1. *VI. El.*
o *cor.* 2. *pr.* 13.

a cor. 7. prop. 13. tum IB ad (a) rectangulum KBF; [*igitur rectangulum G h V eſt ad rectangulum KBF, ut idem rectangulum G h V ad quadratum N h; idem quoque rectangulum G h V eſt ad rectangulum KBF, ut quadratum IB ad idem rectangulum KBF,*] & ideo quadratum N h erit aequale (b) KBF rectangulo, quadratum vero IB aequabitur rectangulo (c) G h V.

b ex pr. 9. V. El. c ex eadem pr.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 121. QVadrata duarum quarumlibet diametrorum coniugatarum IH, NQ aequantur quadratis axium KF, GV.

Ducta enim ex I ordinata IB ad KF, & ex N ordinata N h ad GV, erit quadratum CN aequale (d) quadratis N h, C h; quadratum autem CI aequale (e) quadratis CB, IB; ſed N h quadratum aequatur (f) rectangulo KBF, & IB quadratum aequale eſt (g) G h V; ergo duo quadrata CN, CI aequantur rectangulo KBF cum quadrato CB, & rectangulo G h V cum quadrato C h, adeoque [*ob quadratum CF aequale* (h) *rectangulo KBF cum quadrato CB, & quadratum CV aequale rectangulo* (i) *G h V cum quadrato CV, eadem quadrata CN, CI*] ſunt aequalia binis quadratis CF, & CV, & aſſumptis eorum quadruplis, quadrata NQ, & IH aequabuntur quadratis KF, & GV. Q. E. D.

d 47. I. Elem. e per eamdem. f ex cor. 3. pr. praeced. g ex eodem cor. h ex 5. II. El. i ex eadem pr.

[*Scho-*

[*Scholium.*]

[*Theorematis huius veritas demonſtrata etiam eſt in corollario 6. propoſitionis* 25.]

COROLLARIA.

I. HInc quadrata duarum diametrorum coniugatarum aequantur quadratis aliarum quarumlibet diametrorum pariter coniugatarum ; nam quaelibet horum quadratorum paria aequantur quadratis utriuſque axis.

II. Quadrata etiam CF , & FV erunt aequalia quadratis QI , & IN ; nam illa aequantur (a) duplo quadrato CF , & CV ; haec autem duplo (b) quadrato IC, & CN ; ſed quadrata CF , & CV aequantur (c) quadratis CI , & CN ; ergo etiam GF , & FV quadrata ſunt aequalia quadratis QI, & IN.

a *Schol. gener. num. V.*
b *Schol. gener. num. V.*
c *ex hac prop.*

PROPOSITIO XLV.

AT in Hyperbolis, quadrata diametrorum coniugatarum IH , NQ , (ſi fuerint inaequalia) eadem quantitate inter ſe differunt, ac bina quaelibet aliarum diametrorum coniugatarum KF, GV quadrata. Fig. 122.

Ductis enim ex N, & V inter aſymptotos tangentibus ANT , LVR , quae ipſis ſecundariis diametris IH , KF aequabuntur, nam NA aequabitur (d) ſemidiametro CH ,

d *cor.* 3. *pr.* 42.

& VL ſemidiametro CK, [*ideoque ANT, quae dupla* (a) *eſt NA, aequabitur IH; & LVR, quae dupla eſt* (b) *VL, aequalis erit KF*;] & actis in aſymptoto CA perpendicularibus NM, TB, atque VE, RD, patet (c) fore AM aequalem MB, [*& DE aequalem EL*] ut AN aequatur NT, [*& RV aequatur VL*]: unde differentia quadratorum CN, AN, quae eadem eſt, ac differentia quadratorum CM, MA (quia CN quadratum (d) aequatur CM, & MN quadratis, & AN quadratum aequatur quadratis AM, MN; unde ablato communi quadrato MN, remanet illorum quadratorum differentia eadem, quae CM, & AM) erit eadem, ac differentia quadratorum CM, & MB, quae eadem eſt, ac rectangulum (e) ACB. Similiter differentia quadratorum CV, & VL eadem erit, ac differentia quadrati EC a quadrato EL, ſive ab aequali ED, cuiuſmodi erit (f) rectangulum LCD; ſed rectangula ACB, LCD ſunt (g) aequalia, quippe [*ob parallelas BT, DR,*] CB ad CD eſt, ut (h) CT ad CR, adeoque ut LC ad CA (ob aequalitatem (i) triangulorum CLR, CAT, quibus ineſſe debent, circa communem angulum C, latera (k) reciproce proportionalia); ergo eadem eſt differentia quadratorum NC, & NA, ſive CH, & quadratorum CV, VL, ſive CK: unde & eorum quadruplis aſſumptis, erit eadem differentia quadratorum QN, HI, ac quadratorum VG, KF. Q. E. D.

a *ex pr.* 38.
b *ex eadem pr.*
c *ex* 2. *VI. El.*
d 47. *I. Elem.*
e *6. II. Elem.*
f *6. II. Elem.*
g 16. *VI. Elem.*
h *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
i *cor.* 4. *prop.* 40.
k 15. *VI. Elem.*

[*Scho-*

[*Scholium.*]

Hoc Theorema etiam ex coroll. 6. prop. 25. abunde liquet; cum enim ibi oſtenſum ſit, differentiam quadratorum ex quibuſcumque diametris coniugatis aequalem eſſe differentiae quadratorum ex axibus, ſequitur, quadrata duorum diametrorum coniugatarum eadem quantitate inter ſe differre, ac bina quaelibet aliarum diametrorum coniugatarum quadrata.]

PROPOSITIO XLVI.

SVmptis in Hyperbolae aſymptoto diſtantiis a centro CL, CO, CA continue proportionalibus; & hinc ductis LP, OK, AI alteri aſymptoto parallelis; Hyperbolam in ipſis punctis P, K, I ſecantibus; erunt ſpatia Hyperbolica ipſis intercepta LPKO, OKIA, invicem aequalia. Fig. 123. a cor. 3. prop. 40. b ex hypotheſi.

Completis parallelogrammis CLPR, COKS, CAIM, productiſque AI, RP convenientibus in T, quae reſultant parallelogramma CLEM, COKS, CATR, erunt ſimilia; nam ut AC ad CO, ita (a) OK ad AI: Sed AC ad CO eſt, ut (b) CO ad CL, ergo CO ad CL eſt, ut OK ad AI, ſive (c) ut CS ad CM; ergo CLEM, & COKS ſunt (d) ſimilia. Pariter eſt LP ad OK, ſive (e) CR ad CS, ut (f) OC ad CL, hoc eſt ut (g) CA ad CO: ergo etiam CATR ſimile eſt eidem COKS, adeoque (h) & alteri CLEM; quare (i) diameter CT per reliquos angulos E, K tranſit; & iun-

c 34. I. Elem. d def. 1. VI. El. e 34. I. Elem. f cor 3. pr. 40. g ex hypotheſi. h 21. VI. Elem. i 26. VI. Elem.

& iuncta PI erit quoque diameter parallelogrammi PEIT, ab ipſa CET bifariam ſecta in X: unde erit PI ordinata Hyperbolae ad diametrum CKX, tranſeuntem per verticem K ſegmenti Hyperbolici PKI. Ab aequalibus ergo triangulis CPX, CXI ablatis ſemi-hyperbolis aequalibus PKX, IKX, remanebunt aequales ſectores CPK, CIK: ſed ipſis ae-
a *cor.* 6. quantur (a) ſpatia Hyperbolica LPKO, OKIA;
prop. 40. ergo haec quoque reſultant aequalia. Q. E. D.

COROLLARIA.

I. SI pariter ſumantur in aſymptoto CA ad
Fig. 124. CO, ut quaevis alia CD ad CL, ductis inde parallelis alteri aſymptoto AI, OK, & DQ, LP, reſultabunt aequalia ſpatia Hyperbolica AIKO, & QDLP; ſumpta enim CN media [*proportionali*] inter extremas CA, CL, [*quae quadratum*
b 17. *VI.* *habebit par* (b) *rectangulo LCA*, *ſeu huic* (c)
Elem. *aequali DCO*], adeoque & [*media erit pro-*
c *ex hy-* *portionalis*] inter (d) medias CO, CD; &
poth. & ordinata NV, erit ſpatium IANV (e) aequale
16. *VI.* VNLP; nec non KONV (f) aequale VNDQ;
Elem. ergo & reliquum AIKO aequabitur QDLP.
d 17. *VI.* II. Et ſi ſumptae fuerint quotlibet di-
Elem. ſtantiae continue proportionales CA, CO,
e *per ha-* CN, CD, CL &c., ordinatis correſpondentibus
nc prop. reſultabunt (g) aequalia ſpatia Hyperbolica iis
f *per e-* interpoſita IAOK, KONV, VNDQ, QD-
amdem LP, &c.
prop. III. Quoniam ſi duplicata ſit ratio LC
g *per ha-* ad CN rationis DC ad CN [*ſeu ſi ratio*
nc pr. *LC*

LC ad CN compoſita ſit ex duabus aequa-
libus rationibus LC ad DC, & DC ad CN,
ſunt continue (a) *proportionales CN, CD, CL;* a def. 10.
aequabuntur ſpatia (b) *VNDQ, QDLP, unde*] V. El.
erit ſpatium VNLP duplum VNDQ; Et ſi b per co.
eſſet triplicata prima ratio ſecundae, [*ſeu* 2.
ſi ratio LC ad CN componeretur ex tribus
aequalibus rationibus LC ad CF, CF ad CD,
& CD ad CN, continue forent (c) *proportio-* c ex def.
nales CN, CD, CF, CL, adeoque aequa- 10. V. El.
ri deberent ſpatia VNDQ, QDFG, GF-
LP; quare] eſſet primum ſpatium [*VN-*
LP.] triplum ſecundi [*VNDQ*], to-
tidem enim aequalia ſpatia contineret,
quot aequalibus rationibus eius ratio [*nem-*
pe ratio LC ad CN] componeretur: Hinc
[*ſpatium VNLP tam multiplex eſt ſpa-*
tii VNDQ, quam ratio LC ad CN multiplex
eſt rationis DC ad CN, ſeu ſpatium
VNLP eſt ad ſpatium VNDQ, ut ratio LC
ad CN ad rationem DC ad CN; & genera-
tim] quodlibet ſpatium KOLP eſt ad aliud
ſpatium QDLP, ut ratio LC ad CO, eſt ad
rationem LC ad CD, iuxta quantitatem lo-
garithmicam proportionum.

IV. Quae dicta ſunt de his ſpatiis, va-
lent etiam de ſectoribus Hyperbolicis ICK,
QCP, VCQ &c. quae correſpondentibus
ſpatiis aſymptoto adiacentibus ſunt ſemper (d) d cor. 6.
aequalia. pr. 40.

V. Patet autem, totum ſpatium inter
curvam Hyperbolicam, & eius aſymptotos
interiectum, & in infinitum productum, eſſe
infinitae magnitudinis, quia cum poſſint ra-

tiones CA, CO, CN &c. in infinitum continuari, infinita ſpatia primo IAOK aequalia correſpondebunt hiſce infinitis rationibus, in eodem aſymptotico ſpatio contenta.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 125. SI recto latere NR, aequali tranſverſo NQ Hyperbolae aequilaterae NM, ad eumdem axem Parabola NB deſcribatur, ducta quavis recta BD, axi parallela, conveniente cum axe ſecundario Hyperbolae CE in D, & cum Hyperbola in M, erit hyperboli cum ſpatium CNMD aequale rectangulo ex ſemiaxe tranſverſo CN in curvae parabolicae portionem NB vertici, & eidem rectae BD interpoſitam.

Ordinata enim MK ad Hyperbolam, & BA ab parabolam, quam tangat BG, eique perpendicularis ducatur BP, juncta DN erit ipſi BP aequalis, & parallela; Nam ſubnormalis AP aequatur NC, cum debeat
a *cor.* 16. eſſe medietas (a) lateris recti, & AB eſt (b)
prop. 9. aequalis CD, unde & baſis BP trianguli re-
b 34. *I.* ctanguli BAP aequatur (c) baſi DN alterius
Elem. trianguli rectanguli DCN; ſed ipſa DN ae-
c *ex* 4. quatur DM; quippe rectangulum QKN eſt
I. Elem. aequale (d) quadrato KM, (ut diameter
d *cor.* 7. tranſverſa QN aequatur parametro NR)
pr. 5. ſeu CD, & juncto quadrato CN, qua-
e *ex* 2. dratum (e) CK, ſeu DM, erit (f) aequale
II. El. DN quadrato; quare etiam BP aequabitur
f 47. *I.* DM. Ac ſumpto in tangente BG puncto I
Elem. in-

infinite proximo ipſi B, ductaque HIE parallela BD, [*vel AG, triangulum IBH ſimile* (a) *erit triangulo GBA: huic vero ſimile* (b) *eſt triangulum BAP; igitur etiam triangulum IBH ſimile* (c) *eſt triangulo BAP, unde*] quoniam ob triangulorum IHB, BAP ſimilitudinem eſt IB ad BH, ſive ad DE, ut (d) BP ad PA, ſive ut DM ad CN, erit rectangulum EDM (e) aequale CN in ipſam IB, quae ob infinitam proximitatem eadem eſt, ac portio infinite parva curvae parabolicae, uti rectangulum EDMO, ob rectam OE infinite proximam DM, idem fere eſt, ac ſpatium EDMF Hyperbolicum, a quo differt ſpatio FOM infinities minori; Idque cum ſemper eveniat, patet fore rectangulum ex CN in totam curvam parabolicam NB aequale ſpatio Hyperbolico CDMN ipſi correſpondenti. Q. E. D.

a 4. 6. *Elem.*
b 8. *VI. Elem.*
c 21. *IV. Elem.*
d 4. *VI. Elem.*
e 16. *VI. Elem.*

COROLLARIUM.

Ex quo DN oſtenſa eſt aequari DM, patet facilis modus deſcribendi Hyperbolam aequilateram, inclinatis recto angulo NCD innumeris rectis NE, ND, mox ductis ipſi CN parallelis EF, DM, quae dictis inclinatis NE, ND ſint aequales; nam puncta N, F, M erunt ad curvam Hyperbolicam aequilateram.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 126. 127. Si eodem axe tranſverſo NQ, & alio latere recto NG deſcribatur Hyperbola NABK, ſumpta media proportionali NT inter hoc latus rectum, & tranſverſum, ſive rectum NR Hyperbolae aequilaterae NFM, erit ſpatium NBK ad NMK, ut NG ad NT.

Ordinetur quaevis alia AH, ſecans aequilateram Hyperbolam in F. Erit quadratum BK ad rectangulum QKN, ſive ad quadratum MK Hyperbolae aequilaterae, quod illi (a) aequatur, ut (b) GN ad NQ, ſive ad NR; ut autem GN ad NR, ita [*eſt quadratum GN* (c) *ad rectangulum GNR*, *vel*] quadratum GN ad quadratum NT (d) mediae proportionalis inter illas; ergo erit [*quadratum BK ad quadratum MK*, *ut GN quadratum ad quadratum NT*, &] BK ad MK, ut GN ad NT; ſimiliter autem erit AH ad HF, ut GN ad NT: ergo omnes lineae ſpatii Hyperbolici NBK ad omnes alterius NMK, adeoque & ſpatium deſcriptae Hyperbolae ad illud Hyperbolae aequilaterae, eſt ut latus rectum GN primae ad NT mediam proportionalem inter ipſum GN, & tranſverſum NQ, aut rectum alterius NR. Q. E. D.

a *cor.* 7. *pr.* 5.
b *cor.* 6. *prop.* 5.
c *ex* 1. *VI. El.*
d *ex* 17. *VI. El.*

[*LEMMA ad ſeq. prop.*]

Fig. 128. [*Si fuerit AB ad DE*, *ut HO ad RM*; *BN ad EF*, *ut OQ ad MS*; & *NC ad FG*,

ut

ut QI ad ST, ſintque aequales tam primi antecedentes AB, BN, NC, quam reliqui HO, OQ, QI; erit ſumma primorum antecedentium AC ad ſummam ſuorum conſequentium DG, ut reliquorum antecedentium ſumma HI ad ſummam ſuorum conſequentium RT.]

[*Quoniam* (a) *aequantur AB, BN, NC, itemque HO, OQ, QI, eſtque AB ad DE, ut* (b) *HO ad RM; erit etiam BN ad DE, ut OQ ad RM, & NC ad DE, ut QI ad RM; igitur eſt AC ad DE, ut* (c) *HI ad RM, & invertendo, DE ad AC, ut RM ad HI. Simili ratiocinio oſtendetur, EF eſſe ad AC, ut MS ad HI, & FG ad AC, ut ST ad HI; ergo* (d) *DG erit ad AC, ut RT ad HI, & invertendo, AC ad DG erit, ut HI ad RT. Q. E. D.*]

a *ex hypotheſi.*
b *ex hypotheſi.*
c 24. *V. Elem.*
d 24. *V. Elem.*

PROPOSITIO II.

SPatium Parabolae CAK aequatur duabus tertiis parallelogrammi ipſi circumſcripti IPCK. Fig. 129.

Ordinetur DB ad diametrum AE, & per B ducta FBL diametro parallela, iungatur AC, ſecans BD in G, & LF in M. Ex revolutione parallelogrammi APCE, et trianguli ACP, circa AP, fiet cylindrus (e) triplus Coni; et cum ſit circulus radii LF, ſive PC (f) ad circulum radii ML, ut (g) quadratum illius ad quadratum huius, ſive ut (h) quadratum AP ad quadratum AL, nempe ut quadratum EC ad DB quadratum, ſcilicet

e *ex* 10. *XII. El.*
f *ex* 34. *I. El.*
g *ex* 2. *XII. El.*
h *ex* 34. *I. Elem.*

a *ex pr.* 4. licet ut (a) recta EA ad abſciſſam AD, ſive ut (b) FL ad LB; [*erit circulus radii LF in cylindro, ad circulum radii LM in Cono, ut recta FL in parallelogrammo APCE, ad rectam LB in trilineo ABCP. Eamdem ob cauſam, ducta ÆT parallela LF, erit circulus radii ÆT in Cylindro, ad circulum radii ÆR in Cono, ut ÆT in parallelogrammo, ad ÆS in trilineo; atque ita ſemper. Sunt autem aequales tum omnes circuli in cylindro, tum omnes lineae in parallelogrammo*;] ideo omnes (c) aequales circuli illius cylindri erunt ad omnes circulos inſcripti Coni, ut omnes aequales lineae parallelogrammi ad omnes lineas trilinei parabolici ABCP; [*ſeu cylindrus genitus ex revolutione parallelogrammi APCE, erit ad Conum ex revolutione trianguli ACP, ut parallelogrammum APCE ad trilineum ABCP;*] quare ut cylindrus eſt triplus (d) Coni, ita parallelogrammum APCE triplum eſt trilinei ABCP; adeoque reliquum parabolicum ſpatium ABCE aequatur duabus tertiis partibus dicti parallelogrammi AECP, et duplicando utrumque ſpatium, parabola integra CAK eſt aequalis duabus tertiis parallelogrammi IPCK. Q. E. D.

b *ex* 34. I. *Elem.*

c *ex Lemmat. præ.*

d 10. XII. *Elem.*

COROLLARIA.

I. Hinc patet, eſſe parabolam ſeſquitertiam trianguli inſcripti [*KAC, ſeu parabolam ad hoc triangulum eſſe, ut 4. ad 3.*]; cum enim ſit parabola [*ad triangulum in-*

inſcriptum in ratione compoſita parabolae ad parallelogrammum, & parallelogrammi ad (a) *triangulum, ſitque parabola*] ad parallelogrammum ut (b) 2. ad 3., & parallelogrammum ad triangulum, ut (c) 2. ad 1.; erit parabola ad triangulum in ratione compoſita ex 2. ad 3., et ex 2. ad 1., adeoque ut [*rectangulum* (d) *ex 2. in 2. ad rectangulum ex 3. in 1., ſeu ut*] 4. ad 3.

II. Parabola ABCE ad partem ABD, ſectam ordinata BD eſt, ut cubus EC ad cubum DB; nam quia etiam ABD aequatur duabus tertiis (e) parallelogrammi ADBL, eſt ABCE ad ABD, ut AECP ad ADBL, ſcilicet in ratione (f) compoſita baſium EC, DB, et altitudinum EA, DA, quae (g) duplicata eſt illius, cum ſit [*EA ad DA*,] ut quadratum (h) EC ad DB quadratum; quare erunt haec ſpatia in ratione triplicata ordinatarum EC, DB, adeoque (i) ut cubi eorumdem.

a numer. 12. par. 3. *V. El.*
b *ex hac prop.*
c *ex* 41. *I. Elem.*
d *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
e *ex hac prop.*
f *cor.* 2. *prop.* 23. *VI. El.*
g *cor.* 1. *prop.* 20. *VI. El.*
h *ex pr.* 4.
i *ex* 33. *XI. El.*

[*LEMMA ad ſeq. prop.*]

[*Circulorum peripheriae eam inter ſe rationem habent, quam diametri.*]

[*Quoniam polygonorum ſimilium circulis inſcriptorum ambitus ſunt, ut* (k) *circulorum, quibus inſcribuntur, diametri; etiam ſimilia polygona infinitorum infinite parvorum laterum habebunt ambitus diametris circulorum, quibus inſcribuntur, proportionales. Iam vero haec polygona in circu-*

k *cor.* 1. *prop.* 1. *XII. El.*

a ex Lemmat. ad prop. 2. XII. El. *culos* (a) *deſinunt*, *atque ita illorum ambitus in peripherias commigrant; ergo etiam circuli habent peripherias ſuis diametris proportionales*. Q. E. D.]

[*COROLLARIVM.*]

[*Circulorum igitur peripheriae ſunt ſuis etiam radiis proportionales*.]

PROPOSITIO L.

Fig. 130. Circulus diametri AP aequatur triangulo rectangulo CAB, cuius altitudo radius, baſis autem AB ſit aequalis circumferentiae PAK.

Nam per quodlibet punctum radii D ducta concentrica peripheria DFO, & in triangulo recta DE baſi parallela, erit AB ad DE, ut peripheria PAK ad peripheriam FDO, cum (b) tam hae, quam (c) illae ſint, ut AC ad CD; quare ut AB aequatur (d) peripheriae PAK, ita DE aequatur alteri peripheriae FDO, et hoc ubique accidet: omnes ergo lineae trianguli CAB aequantur omnibus peripheriis concentricis ipſius circuli; ergo eſt triangulum circulo aequale Q. E. D.

b ex cor. Lemmat. praeced.
c cor. 1. prop. 4. VI. El.
d ex hypotheſi.

COROLLARIA.

e ex Sch. prop. 41. I. El. I. Hinc circulus idem aequabitur (e) rectangulo ex radio in dimidiam circumferentiam, vel ex tota circumferentia in dimi-

midium radii, ſeu quartam partem diametri: unde quia (a) ex calculo archimedeo eſt circumferentia ad diametrum, ut ferme 22. ad 7., [*ſeu diametro dati circuli exſiſtente 7., circumferentia eſt 22.; circulus aequalis erit facto ex 11. in 3. cum dimidio, ſeu ex 11. in 7. dimidia, nempe aequabitur dimidiis 77., ſeu 38. cum dimidio: iam vero quadratum diametri eſt 49.; igitur*] erit circulus ad quadratum diametri, ut 38. cum dimidio ad 49., ſive [*ut 77. dimidia ad dimidia 98., vel utrumque rationis terminum duplicando,*] ut 77. ad 98., hoc eſt [*utroque rationis termino per 7. diviſo*], ut 11. ad 14. a *prop.* 2. *de circuli dimens.*

II. [*Etiam ſector quilibet ACK aequatur triangulo rectangulo AMC, cuius altitudo radius CA, baſis vero AM ſit aequalis arcui AK. Nam circulus eſt ad ſectorem ACK, ut* (b) *circumferentia ad arcum AK, ſeu ut AB ad AM* (c)*: ſed ut AB ad AM, ita eſt triangulum ABC ad triangulum AMC* (d)*; ergo circulus eſt ad ſectorem, ut triangulum ABC ad triangulum AMC: Sed circulus* (e) *aequatur triangulo ABC; igitur ſector aequalis eſt triangulo AMC.*] b ex 33. *VI. El.* c ex *hypotheſi.* d 1. *VI. Elem.* e *ex hac prop.*

III. [*Quare ſector circularis ACK aequabitur* (f) *rectangulo ex radio AC in dimidium arcus AK, vel ex toto arcu AK in ſemiradium AC, aut in quartam partem diametri AP.*] f *ex Sch. pr.* 41. *I. Elem.*

IV. [*Quemadmodum circulus PAK aequalis eſt triangulo ABC, ita circulus FDO aequabitur triangulo DEC, habenti baſim DE aequalem* (g) *circumferentiae FDO; unde hu-* g *ex demonſtra. huius pr.*

iuſmodi circulorum differentia, ſeu armilla utroque circulo intercepta, aequabitur trapezio ABED, quod eſt triangulorum ABC, DEC differentia.]

PROPOSITIO LI.

Ellipſis NEQ eſt ad circulum ſuper axe minori NQ deſcriptum, ut minor axis ad maiorem.

Fig. 131. Ordinata per centrum CE, quae eſt ſemiaxis minor Ellipſis, et producta ad circulum in B, tum qualibet alia ordinata KM, pertingente ad circulum in D, ut rectangulum QKN ad QCN, ita erit (a) quadratum MK ad quadratum EC, & quadratum DK priori rectangulo (b) aequale, ad BC quadratum aequale alteri QCN. Ergo [*quadratum MK eſt ad quadratum EC, ut quadratum DK ad quadratum BC, & MK ad EC erit, ut DK ad BC, & permutando, MK ad DK, ut EC ad BC. Eamdem ob cauſam ducta alia ordinata ST, pertingente ad circulum in R, erit ST ad RT, ut eadem EC ad BC; atque ita porro. Igitur*] omnes lineae (c) Ellipſis ad omnes lineas circuli ſunt, ut EC ad CB; adeoque ſpatium totius Ellipſis ad integrum circulum eſt, ut ſemiaxis minor EC ad radium CB, ſeu CQ ſemiaxem maiorem, adeoque ut axis minor ad maiorem. Q. E. D.

a *ex pr. 6.*

b *ex cor. 1. pr. 2.*

c *ex 12. V. Elem.*

CO-

COROLLARIA.

I. DVctis ex centro rectis CM , CD, erit pariter ſector Ellipticus CMQ ad ſectorem circularem CDQ in eadem ratione minoris axis ad maiorem ; nam ſegmentum MKQ ad (a) ſegmentum DKQ, & triangulum CMK ad (b) CDK, ſunt, ut MK ad DK, ideoque (c) ut EC ad BC, ſeu CQ; [*igitur MKQ eſt ad DKQ, ut* (d) *CMK ad CDK, & ſumma antecedentium CMQ eſt ad ſummam conſequentium CDQ, ut* (e) *antecedens unum MKQ ad ſuum conſequens DKQ, ſeu ut ſemiaxis minor EC ad* (f) *maiorem ſemiaxem CQ, adeoque ut axis minor ad maiorem.*]

II. [*Hinc ſector Ellipticus MCQ aequatur rectangulo ex minori ſemiaxe CE in dimidium circularis arcus DQ; quippe circularis ſector DCQ ad ſectorem Ellipticum MCQ eſt, ut* (g) *radius CB ad minorem ſemiaxem CE, ſeu ut rectangulum* (h) *ex CB in dimidium arcus DQ, ad rectangulum ex CE in dimidium eiuſdem arcus DQ: at ſector circularis DCQ aequatur* (i) *rectangulo ex radio CB in dimidium arcus DQ; igitur etiam* (k) *ſector Ellipticus MCQ aequabitur rectangulo ex minori ſemiaxe CE in dimidium arcus DQ.*]

III. [*Quin & integrum Ellipſeos ſpatium aequale eſt rectangulo ex minori ſemiaxe CE in dimidium circumferentiae, radio CB deſcriptae, ſeu in ſemiperipheriam QBN; ſiquidem eſt circulus ad Ellipſim, ut CB* (l)

a *ex hac prop.*
b *ex* 1. *VI. El.*
c *ex hac prop.*
d *ex* 11. *V. El.*
e *per* 12. *V. El.*
f *ex demonſtr.*
g *ex cor. praeced.*
h *ex* 1. *VI. El.*
i *ex cor.* 3. *prop. praeced.*
k *ex* 14. *V. El.*
l *ex hac prop.*

ad CE, ſeu ut rectangulum ex radio CB in ſemiperipheriam QBN ad rectangulum ex CE in ſemiperipheriam eamdem; ſed circu-
a cor. 1. prop. 50. *lus aequatur* (a) *rectangulo ex radio CB in ſemiperipheriam QBN; ergo & Ellipſis integra*
b 14. VI. Elem. *aequabitur* (b) *rectangulo ex minori ſemiaxe CE in ſemiperipheriam QBN, radio CB deſcriptam.*]

[*LEMMA ad ſequent. prop.*]

Fig. 130. [*SI in circulo PAK ordinetur quaevis DS, atque radio CD deſcribatur circulus priori concentricus FDO; armilla, hiſce duobus circulis intercepta, aequabit circulum radio DS deſcriptum.*]

[*Quoniam circulus PAK eſt ad circu-*
c 2. XII. Elem. *lum FDO, ut quadratum* (c) *CA ad quadratum CD; dividendo, erit exceſſus circuli PAK ſupra circulum FDO, ſeu armilla utroque circulo intercepta, ad circulum FDO, ut exceſſus quadrati CA ſupra quadratum CD,*
d 5. II. Elem. *ſeu* (d) *rectangulum PDA, ad quadratum CD: ſed rectangulum PDA aequale* (e) *eſt*
e cor. 1. pr. 2. *quadrato DS; igitur armilla ad circulum FDO erit, ut DS quadratum ad quadratum CD, vel ut circulus* (f) *radii DS ad circu-*
f 2. XII. Elem. *lum FDO; quare armilla aequabit* (g) *circulum radio DS deſcriptum. Q. E. D.*]
g 9. V. Elem.

CO-

COROLLARIA.

I. [*Quia armilla* (a) *aequatur trapezio BEDA, huic trapezio aequabitur etiam circulus radio DS deſcriptus.* a cor. 4. prop. 50.

II. [*Quoniam DS quadratum, utpote* (b) *aequale rectangulo PDA, aequatur* (c) *differentiae quadratorum CA, CD; liquet, armillam duobus circulis radiorum CA, CD interceptam, circulo aequalem fore, cuius radii quadratum aequale eſt differentiae quadratorum CA, CD.*] b cor. 1. pr. 2. c ex 5. II. El.

PROPOSITIO LII.

SI quaelibet Sectio Conica AEB circa ſuum axem ED rotetur, cuius tangentes ex terminis baſis ductae AF, BH, cum verticali tangente EF conveniant in F, H, iunctis ad medium baſis D, rectis FD, HD, erit ſolidum conoidale ex rotatione DEB genitum aequale ſolido, ex trianguli DHB rotatione circa eumdem axem facta, prodeunti: ſolidum autem ex trilinei ENBH revolutione circa ipſum axem aequatur Cono, ex trianguli EDH revolutione genito. Fig. 132.

Ducta enim ubilibet baſi, & tangenti verticali parallela LK, ſecante axem in I, tangentes in L, K, curvam in M, N, rectas FD, HD in O, P; erit rectangulum MKN ad quadratum KB, ut (d) quadratum d ex pr. 16.

 EH

EH ad HB quadratum, & permutando, rectangulum MKN ad quadratum EH, ut quadratum KB ad quadratum HB, ſive (a) ut DI quadratum ad quadratum DE, vel, ut (b) quadratum IP ad quadratum EH; quare [*rectangulum MKN ad quadratum EH eſt, ut quadratum IP ad idem EH quadratum, ideoque*] IP quadratum aequatur (c) rectangulo MKN, ſcilicet differentiae quadratorum IK, IN; unde & circulus radio IP deſcriptus, erit aequalis differentiae (d) circulorum a radiis IK, IN deſcriptorum, ſive armillae circulari, quae in revolutione trilinei ENBH circa axem ED gignitur a recta NK; & hoc ſemper eveniet; quare Conus a triangulo EDH circa ED revoluto deſcriptus, cuius Sectiones ſunt circuli radiorum IP, aequabitur ſolido ex revolutione trilinei ENBH circa eumdem axem, cuius ſectiones ſunt armillae per rectas NK deſcriptae. Sed hoc ſolidum ex trilineo ENBH, cum ſolido conoidali ex revolutione Conicae Sectionis ENBD circa ED, aequatur ſolidis ex triangulo EDH, & ex triangulo DHB circa eumdem axem revolutis; ergo ut ſolidum ex trilineo ENBH aequatur Cono ex triangulo EDH, etiam reliquum ſolidum conoidale ex revolutione ENBD aequatur reſiduo ſolido genito ex trianguli DHB revolutione circa eumdem axem. Q. E. D.

a ex cor. 1. pr. 2. VI. El.
b ex cor. 1. pr. 4. VI. El.
c 9. V. Elem.
d cor. 2. Lemmat. praeced.

[*Scholium*]

[*Quod in ſolido conoidali eſt hactenus demonſtratum, etiam in ſegmento ſphaerico lo-*

cum

tum habet; ſi enim DENB ſit circuli ſemiſegmentum; ex cuius revolutione circa axem ED oriatur ſegmentum ſphaericum AEB; erit tangentis BK quadratum aequale (a) *rectangulo MKN: aequantur vero* (b) *quadrata tangentium EH, BH; unde* (c) *rectangulum MKN ad quadratum EH erit, ut quadratum BK ad BH quadratum, vel ut* (d) *quadratum DI ad DE quadratum, vel ut* (e) *quadratum IP ad quadratum EH; igitur* (f) *rectangulum MKN aequabitur IP quadrato; atque ita ſuperiorem demonſtrationem ſegmento ſphaerico applicando, oſtendetur, ſegmentum ſphaericum ex rotatione ſemiſegmenti circularis DENB genitum aequari ſolido genito ex revolutione trianguli DHB.*]

a 36. III. Elem. b cor. 2. pr. 36. III. El. c ex pr. 7. V. El. d ex cor. 1. pr. 2. VI. El. e cor. 1. pr. 4. VI. Elem. f 9. V. El.

COROLLARIA.

I. PRoductis tangentibus collateralibus AF, BH, quae cum axe conveniant in G, & in baſi ſecta DS; cuius quadratum aequet differentiam quadrati AD ab FE quadrato, iuncta GS, erit conoides ex revolutione ENBD circa axem ED, aequalis Cono, ex rotatione trianguli SGD circa GD; nam Conus ex revolutione trianguli ADG eſt triens producti (g) ex circulo radii DA in DG, & conus ex triangulo FEG, cum Cono ex triangulo FED eſt triens producti ex circulo radii EF in (h) EG, plus ED, ideſt in eamdem DG; ergo exceſſus Coni ex AD ſupra Conos ex FEG, & FED, hoc eſt ſolidum ex revolutione trianguli AFD, ſeu DHB circa ED, nempe

g ex pr. 10. XII. Elem. h ex eadem pr.

a ex *hac prop.* conois ex rotatione(a)ENBD aequabitur trienti producti, ab exceſſu circuli DA radio deſcripti ſupra circulum radii EF, in eamdem altitudinem DG; quare cum ſit quadratum DS differentia (b) quadratorum DA, EF, etiam circulus radii DS eſt exceſſus (c) circuli [*radii*] DA ſupra circulum [*radii*] EF; ideoque Conus a triangulo SGD genitus aequatur ipſi conoidi.

b ex *hypotheſi.*
c ex *cor.* 2. *Lemmat. ad prop.* 52.

II. Si curva AENB ſit parabola, erit conoides ab ipſa procedens aequalis triplo ſolidi ex revolutione trianguli GFD circa ipſam GD; quia enim ſubtangens DG eſt dupla (d) GE, eſt AD (e) dupla FE, & illius quadratum huius quadruplum; unde circulus radii DS, [*qui eſt circulorum radiis DA, EF deſcriptorum* (f) *differentia* ,] erit triplus circuli radii EF, ideoque Conus ex triangulo SGD, nempe ipſa Conois, triplo maior erit ſolido ex rotatione GFD, qui aequatur Cono ex circulo radii EF in ipſam altitudinem GD.

d *cor.* 6. *prop.* 9.
e ex *cor.* 1. *pr.* 4. *VI. El.*
f ex *cor.* 1.

Fig 133. III. quaelibet conois eſt ad Conum inſcriptum a triangulo DEB circa axem ED revoluto, genitum, ut ſumma baſis DB, & verticalis tangentis EH, ad ipſam DB; nam radio DB circulo BVA deſcripto, & ducta HV axi parallela, ſecante baſim in T, circulum in V, & iuncta DV perpendiculari TI, erit TV quadratum exceſſus (g) quadrati DV ſupra quadratum DT, ſeu differentia quadratorum DB, EH; quare cum ſit conois aequalis (h) Cono, cuius baſis circulus radii TV, & altitudo DG, erit [*eadem conois*] ad Conum

g ex 47. *I. Elem.*
h ex *co.* 1.

num inſcriptum radii DB, & altitudinis DE in ratione (a) compoſita [*ex ratione baſium, nempe*] quadrati TV ad (b) quadratum DB, ſeu DV, ideſt [*rectanguli DVI, quod TV quadrato* (c) *aequale eſt, ad quadratum DV, ſeu*] IV (d) ad VD, & [*ex ratione altitudinum, nempe*] GD ad DE, quae eſt eadem, ac (e) GB ad BH, ſeu (f) DB, aut DV ad TB; ergo conois ad inſcriptum Conum eſt [*in ratione compoſita ex rationibus IV ad VD, & VD ad TB, ſeu*] ut IV (g) ad TB; ſed in hac ratione eſt quoque (h) AT ad DV; nam rectangula IVD, ATB ſunt aequalia, eo quod (i) quadrato TV aequantur; ergo ratio conoidis ad inſcriptum Conum eſt eadem, quae AT ad DV, ideſt DB plus EH ad DB.

IV. [*Iam vero DB, plus EH eſt ad DB, ut DG, plus GE* (k) *ad GD*]. Vnde pariter conois ad inſcriptum Conum erit, ut DG plus GE ad ipſam DG, ideſt producto axe ad R, ut ſit GR aequalis GE, erit ratio conoidis ad Conum inſcriptum, eadem quae DR ad DG.

V. Hinc conois parabolica erit ſeſquialtera Coni inſcripti, quia DR erit tripla DE, cuius dupla (l) eſt DG, unde DR ad DG eſt, ut 3. ad 2. Et quia cylindrus conoidi circumſcriptus eſſet (m) triplus inſcripti Coni, foret is duplus conoidis Parabolicae ſibi inſcriptae, quippe cum ſit cylindrus ad Conum, (n) ut [3. *ad* 1. *ſeu ut*] 6. ad 2., & Conus ad conoidem, ut 2. ad 3., erit [*ex aequo*] cylindrus ad conoidem, ut 6. ad 3., ideſt

a ex Schol. pr. 15. XII. El.
b 2. XII. Elem.
c cor. 1. prop. 8. VI. El. & 17. VI. El.
d ex 1. VI. Elem.
e ex co. 1. 4. VI. El.
f ex co. 1. 4. VI. El.
g ex num. 12. par. 3. V. El.
h 16. VI. Elem.
i cor 1. pr. 8. VI. Elem. & 17. VI. Elem. & cor. 1. pr. 2.
k 18. V. Elem.
l cor. 6. pr. 9.
m 10. XII. El.
n per eamdem.

ideſt [*cylindrus erit*] duplus [*conoidis.*]

Fig. 134. VI. Si curva AEB ſit ſemicirculus, aut ſemiellipſis, quoniam laterales tangentes AF, BH, ex terminis alterius axis AB ductae, ſunt parallelae axi ED, erit tangens EH aequalis DB; ergo DB plus EH eſt dupla DB, adeoque Hemiſpherium, ſive Hemiſpherois Elliptica dupla erit inſcripti Coni; cylindrus autem circumſcriptus hemiſpherio, aut hemiſpheroidi erit eius ſeſquialter; nam cylindrus ad Conum eſt, ut (a) 3. ad 1., Conus vero ad hemiſpherium, aut hemiſpheroidem, ut (b) 1. ad 2.; ergo [*ex aequo*] cylindrus ad illud ſolidum hemiſpherium, vel hemiſpheroidem eſt, ut 3. ad 2. Idemque valet de cylindris integrae ſpherae, aut ſpheroidi circumſcriptis.

a 10. *XII. El.* b *ex demonſtr.*

PROPOSITIO LIII.

Fig. 135. SI ſpatium Hyperbolae BH, & aſymptoto CI interiectum revolvatur circa axem BE, ſolidum hinc genitum aequabitur cylindro aeque alto baſim habenti circulum radii BC.

Quoniam rectangulum IHG, nempe differentia (c) quadratorum EI, HE, aequatur quadrato tangentis (d) BC, ſive (e) rectae EK, etiam differentia circulorum a radiis EI, EH [*deſcriptorum*], ideſt armilla circularis genita a recta HI in rotatione ſpatii aſymptotici BHIC circa axem BE, aequabitur (f) circulo radii EK in cylindro ex revolutione rectanguli BCKE deſcripto; idque ſemper evenit

c 5. *II. Elem.* d *ex cor.* 1 *pr.* 38. e 34. *I. Elem.* f *cor.* 2. *Lemm. ad pr.* 52.

venit; ergo omnes armillae circulares illius ſolidi aequantur omnibus circulis huius cylindri, & ideo ſolidum illud huic cylindro aequatur.

COROLLARIA.

I. Hinc conois hyperbolica ex revolutione ſectionis BHE circa axem BE, aequatur annulo procedenti ex revolutione trianguli CKI circa eumdem axem; hic enim annulus cum cylindro orto ex rectangulo BCKE, adaequat ſummam ex conoide BHE, & ex ſolido genito ex aſymptotico ſpatio BHIC; unde cum hoc ſit aequale (a) dicto cylindro, etiam conois hyperbolica dicto annulo aequatur. a *ex hac pr.*

II. Similiter ſi aſymptoticum ſpatium ABCD circa ſecundum axem AF revolvatur, ſolidum hinc ortum aequabitur cylindro orto ex revolutione rectanguli ABEF circa eumdem axem; nam & rectangulum CDH, [*quod eſt differentia* (b) *quadratorum FC, FD,*] aequatur (c) quadrato AB, ſive (d) FE: unde differentia circulorum ex radiis FC, FD, ideſt (e) armilla circularis genita a recta DC in dicto ſolido, aequatur circulo radii FE in illo cylindro, & hoc ſemper evenit, unde totum ſolidum toti cylindro aeque longo aequale erit. Fig. 136. b *ex 5. II. Elem.* c *ex pr. 39.* d *34. I. Elem.* e *ex Lemmat. pr. 52.*

III. Annulus autem ex Hyperbolico trilineo BEC, circa AF revoluto, aequabitur Cono ex revolutione trianguli ADF circa eumdem axem; nam ille annulus cum cylindro,

& hic

& hic conus, cum ſolido ex aſymptotici ſpatii revolutione, complet Hyperbolicam cylindroidem, ex revolutione ſpatii ABCF circa eumdem axem AF, genitam: [*ſed ſolidum ex revolutione aſymptotici ſpatii ABCD genitum, aequatur* (a) *cylindro ex revolutione rectanguli ABEF; igitur etiam Conus ex ADF aequari debet annulo ex revolutione trilinei BEC*].

a ex cor. 2.

[*LEMMA ad ſeq. prop.*]

Fig. 137. [*Cylindri recti ABFE ſuperficies aequatur rectangulo BFKR, cuius altitudo BF eſt eadem, ac cylindri, baſis vero FK aequatur circumferentiae cylindricae baſeos EFS.*]

[*Sumptis in altitudine BF punctis quotlibet C, N, perque illa traiectis planis, baſi cylindricae parallelis, fiant ſectiones DTC, MLN, quae circuli erunt, tum mutuo, tum baſi EFS aequales, aganturque in rectangulo BFKR ipſi FK parallelae CQ, NO, quae invicem* (b), *rectaeque FK* (c) *aequabuntur. Quoniam circumferentia EFS aequatur rectae FK, etiam circumferentiae ſectionum circularium DCT, MNL aequabuntur CQ, NO. Simili modo ſi ex ſingulis aliis punctis altitudinis BF circulares ſectiones fiant, baſi cylindricae parallelae, atque in rectangulo BFKR totidem rectae ex iisdem punctis ducantur, parallelae FK; ſingulis hiſce rectis aequabuntur ſingulae huiuſmodi ſectionum circumferentiae; hae igitur ſimul ſumptae circum-*

b ex 34. 1. Elem.

c ex eadem pr.

cumferentiae illas ſimul ſumptas rectas lineas adaequabunt : ſed huiuſmodi circumferentiae ſimul ſumptae complent cylindricam ſuperficiem, & rectae illae rectangulum BFKR; igitur cylindri recti ABFE ſuperficies aequatur rectangulo BFKR. Q. E. D.]

[COROLLARIA.]

I. [*QVare rectorum cylindrorum ſuperficies ſunt, ut rectangula ex illorum altitudinibus in ſuarum baſium circumferentias.*]

II. [*Quapropter ſi cylindri recti fuerint aeque alti, illorum ſuperficies erunt peripheriis baſium proportionales.*]

PROPOSITIO. LIV.

INſcripto rectangulo DEAG inter Hyperbolam aequilateram DC, & eius aſymptotos EA, AB, ſi totum aſymptoticum ſpatium EDCKBA circa AB revolvatur infinities longum, efficietur ſolidum duplum cylindri a dicto rectangulo circa GA revoluto deſcripti. *Fig. 138.* a *cor. 3. prop. 40.*

Agatur quaelibet CI aſymptoto parallela, ſecans rectanguli latera in F, I, eiuſque diametrum EG in H. Erit [*BA ad AG, ut DG* (a) *ad CB, ſeu*] CI (b) ad DE, ut EA ad AI, ſive ut peripheria radio AE deſcripta, ad (c) peripheriam radio AI deſcriptam; Ergo rectangulum ex altitudine CI, & peripheria circulari radii AI, quod eſt (d) aequale ſuperficiei cylindricae a recta b *pr. 34. I. Elem.* c *coroll. Lemmat. ad prop. 50.* d *ex Lemmat. praeced.*

CI,

CI, circa AB revoluta, deſcriptae, aequatur rectangulo, ex altitudine DE, & baſi peripheria radii AE, quae eſſet cylindrica ſuperficies (a) ex revoluta DE circa AB, genita: quare cylindrica ſuperficies genita a linea CI, ad ſuperficiem cylindricam genitam ab FI eſt, ut (b) cylindrica ſuperficies genita a DE ad ipſam genitam ab FI, nempe (c) ut peripheria radii EA, ad peripheriam radii AI, nempe ut (d) EA ad AI, ſive (e) ut DG ad GF, vel (f) ut DE, ſive FI ad FH. [*Eodem modo oſtendetur, eſſe ſuperficiem genitam a c L, ad ſuperficiem genitam ab f L, ut f L ad f b;*] & hoc ubique eveniet: ergo ſingulae ſuperficies cylindricae, componentes ſolidum hyperbolicum ex revolutione dicti ſpatii aſymptotalis, ad ſingulas cylindricas ſuperficies conſtituentes cylindrum ex rectangulo DEAG genitum, ſunt, ut ſingulae lineae eiusdem rectanguli, ad lineas illis correſpondentes in triangulo DEG; cum itaque ſint aequales omnes illae Cylindricae (g) ſuperficies ſolidi hyperbolici, nec non aequales lineae ordinatae in parallelogrammo rectangulo, erit (h) ipſum ſolidum Hyperbolicum ad dictum cylindrum, ut rectangulum ad inſcriptum triangulum, ſcilicet in ratione (i) dupla; unde patet propoſitum.

a *ex eodem Lemmat.*
b *pr.* 7. *V. Elem.*
c *cor.* 2. *Lemmat. praeced.*
d *cor. Lemmat. ad prop.* 50.
e 34. *I. Elem.*
f *cor.* 1. *prop.* 4. *VI. El.*
g *ex demonſtr.*
h *Lemm. ad prop.* 49.
i *ex pr.* 34. *I. El.*

COROLLARIA.

I. HInc [*ſolidum ab aſymptotico ſpatio EDCKBA genitum, eſt ad cylindrum genitum a rectangulo GDEA, ut* 2. *ad* 1.; *igitur*] dividendo

do

do, ſolidum Hyperbolicum ſupra Cylindrum a rectangulo GDEA genitum exiſtens, nempe à ſpatio DCKBG deſcriptum, erit aequale cylindro illi ſibi ſuppoſito; & ſimiliter alia portio dicti ſolidi ex revolutione ſolius cCKBb genita, aequabitur cylindro ſibi ſuppoſito, per rectangulum cLAb deſcripto. a *ex Sch. prop. 15. XII. El.*

II. Et eiuſmodi ſolida ex DCKBG, & ex cCKBb revolutis genita, erunt ut radii DG, cb ſuarum baſium circularium, quippe in hac ratione ſunt cylindri illis ſuppoſiti, quibus dicta ſolida aequantur, utpote in ratione (a) compoſita altitudinum ED, Lc (quae eadem eſt (b) reciproce LA ad AE, ſeu rectanguli (c) LAE ad AE quadratum), & [*ex ratione baſium, nempe circuli radio AE deſcripti, ad circulum radii AL, nempe*] AE quadrati (d) ad quadratum AL, adeoque ſunt, ut (e) LAE ad AL quadratum, ſcilicet ut (f) AE ad AL, ſeu (g) ut DG ad cb. b *cor. 3. prop. 40.* c *ex pr. 1. VI. El.* d *ex pr. 2. XII. Elem.* e *ex num. 12. par. 3. V. El.* f *ex pr. 1. VI. El.* g *ex 34. I. Elem.*

III. Ideo ſi diviſa fuerit AE in aliquot partes aequales AI, IL, LH, HE &c. ductis aſymptoto parallelis IC, Lc, HM, ED, atque ordinatis ad aſymptoton CB, cb, MN, DG, ex revolutione huius ſpatii aſymptotici circa AB, erunt partes a portionibus DMNG, McbN, cCBb, & ultima infinite longa CKB deſcriptae, invicem aequales; cum enim ſint illa integra ſolida, [*genita ex revolutione ſpatiorum DCKBG, MCKBN, cCKBb, CKB*,] ut (h) radii baſium [*DG MN, cb, CB*], eorum differentiae [*nempe ſolida genita a portionibus DMNG,* Fig. 139. h *ex cor. praeced.*

NG, *McbN*, *cCBb*, *CKB*] ſunt, ut differentiae talium radiorum [*nempe EH*, *HL*, *LI*, *IA*], quae hic ſunt aequales.

IV. Quod ſi totum ſpatium ex integra Hyperbola, & utroque infinito aſymptoto contentum revolvatur circa unam aſymptoton, nempe AOQPDCK circa AB, erit hoc magnitudinis infinitae, quippe in ipſa infinita aſymptoto AOQ infinitae partes aequales ipſis AI, IL &c. deſignari poſſunt, quibus totidem correſpondebunt infinitae portiones huius ſolidi, invicem (a) aequales.

a ex cor. praeced.

FINIS.

A01 1462285

3.9 G 5.9

Digitized by Google

Digitized by Google